Formas de clasificar elementos de un conjunto. Relaciones de equivalencia

Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor.
Universidad de Salamanca.
6 de enero de 2010

Clasificar los elementos de un conjunto es lo mismo que definir una partición en ese conjunto[1]. En este artículo se describen tres formas de clasificar los elementos de un conjunto, o sea, tres procedimientos de partir un conjunto.

La clasificación de los elementos de conjuntos es utilizada por la ciencia para organizar el conocimiento y facilitar su aumento, por lo que conviene analizar el propio proceso de clasificar para que sirva mejor a estos fines. Pero conviene tener presente que la acción de clasificar es una acción habitual, más o menos consciente, de la vida cotidiana, y que, en esencia, la clasificación científica no difiere de la acción común de clasificar. Tener en cuenta esta última afirmación puede facilitar el entendimiento de lo que sigue.

1. Clasificar citando los elementos de cada clase

Una forma de definir los subconjuntos A_i que son elementos de una partición P en el conjunto A consiste en citar todos los elementos de cada A_i. Por ejemplo, si

$$A = \{a, b, c, d\} ,$$

una partición de A es el conjunto

$$P = \{\{a, c\}, \{b, d\}\} ,$$

donde las partes o clases de A que son los elementos de esa partición son

$$A_1 = \{a, c\} \text{ y } A_2 = \{b, d\} ,$$

que se han definido especificando sus elementos.

Otra partición de A es

$$Q = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\} .$$

[1] El artículo ‘Partir y clasificar’ de esta misma sección ‘Comentarios técnicos’ es preparación para este. Aquí se utilizarán conceptos definidos en aquel.

Esta forma de partir un conjunto se llamará *clasificar los elementos de un conjunto citando los elementos de cada clase*. Así suelen partirse conjuntos de muy pequeño número de elementos. Por ejemplo, si con Juan, Alberto, Ricardo, Carlos, Roberto y Marcos se quieren hacer dos equipos de fútbol sala, lo más fácil es hacer la partición que se desee citando los nombres de los jugadores que formarán cada parte, cada equipo: $A_1 = \{\text{Juan, Alberto, Roberto}\}$, y $A_2 = \{\text{Ricardo, Carlos, Marcos}\}$.

Pero hacer particiones de un conjunto *A* citando uno por uno los elementos de cada parte no es posible si *A* es un conjunto infinito, como ocurre, por ejemplo, con el conjunto *N* de los números naturales. Tampoco suele ser práctico si *A* contiene un gran número de elementos.

2. Clasificar caracterizando los elementos de cada parte

Incluso si el conjunto *A* que se quiere partir es finito, las clasificaciones más útiles para la ciencia no suelen citar uno por uno los elementos de cada clase, sino que se dan características que permiten saber a qué clase pertenece cada elemento de *A* [2]. Así, si *N* es el conjunto de los números naturales sin el cero y se dice que P_1 es el subconjunto de los números naturales impares y P_2 el de los pares, se ha definido la partición $P = \{P_1, P_2\}$ en *N* sin citar uno por uno los elementos de P_1 y P_2 . Pero las propiedades con las que se han definido P_1 y P_2 son características, pues permiten que se sepa si cada número natural pertenece a P_1 o a P_2 . Así, de 30 se sabe que es par y de 21 que es impar. Esta forma de clasificar se llama *clasificar caracterizando los elementos de cada parte*.

Puede no parecer muy útil para el conocimiento clasificar los números naturales sin el cero en impares y pares, pues esa clasificación solo dice que un número como el 30 es múltiplo de 2 y 21 no lo es. Pero en realidad esta clasificación está dando mucha más información, en concreto toda la que se desprende de las características clasificatorias. Por ejemplo, se deduce que 30 no es un número primo porque, como es par, es múltiplo de dos. También se deduce que entre los pares no hay ningún número primo distinto de 2, pues todos tienen a 2 como divisor; por tanto, todos los números primos salvo el 2 son impares... También que la suma de cualquier número natural *n* con él mismo es siempre un número par, pues $n+n=2n$, que es múltiplo de 2... Y otras propiedades.

Es decir, las clasificaciones por caracterización son útiles para la ciencia precisamente por las propiedades que derivan de las propiedades que definen cada clase: todas son comunes a todos los elementos de esa clase. Por eso no cualquier clasificación de los elementos de un conjunto es útil, y hay clasificaciones más útiles que otras. Una clasificación es más útil para el conocimiento cuantas más propiedades se deriven de las

[2] Una acepción de ‘característica’ del Diccionario de la Real Academia Española es “Dicho de una cualidad: Que da carácter o sirve para distinguir a alguien o algo de sus semejantes”.

que han servido para caracterizar cada clase, porque así se sabe más de los elementos que constituyen cada clase. Es decir, las clasificaciones más útiles son las que permitan deducir más cosas de los elementos de cada clase, porque así facilitan más el conocimiento.

3. Clasificar por medio de relaciones de equivalencia

Hay otra forma de partir conjuntos, que es lo mismo que clasificar sus elementos, algo más indirecta que las anteriores, pero de notable utilidad en algunos casos. Es consecuencia de establecer algunas relaciones entre los elementos de los conjuntos, que se llaman relaciones de equivalencia. Por eso comenzaremos por mostrar lo que son las relaciones en los conjuntos, para desembocar en la definición de relación de equivalencia.

Relaciones binarias en un conjunto

Se llama relación binaria definida en un conjunto A no vacío a cualquier conjunto de pares ordenados cuyas componentes son elementos de A.

Una relación binaria definida en un conjunto A se llama también, simplemente, ‘relación binaria en A’. Por ejemplo, si $A=\{a,b,c\}$, los conjuntos

$$R_1=\{(a,b),(b,a),(b,c),(a,a),(a,c)\} \text{ y } R_2=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$$

son relaciones binarias en A. De los elementos de A que son componentes de un par de una relación en A se dice que están relacionados por esa relación. Por ejemplo, a y b están relacionados por R_1. Se escribe $(a,b)\in R_1$. También b y a, y b y c están relacionados por R_1, o sea $(b,a)\in R_1$ y $(b,c)\in R_1$. A veces se escribe también aR_1b, bR_1a y bR_1c. aR_1b significa lo mismo que $(a,b)\in R_1$.

Nótese que cada relación binaria en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano $A\times A=A^2$.

En realidad pocas veces las relaciones binarias se definen citando sus elementos, como se han definido R_1 y R_2. Más frecuentemente se definen por medio de reglas de formación de los pares ordenados que son los elementos de la relación. Entonces, la misma regla también se llama ‘relación’. Por ejemplo, la expresión ‘pares de números naturales en los que el primero es divisor del segundo’ define una relación binaria D, algunos de cuyos elementos son $(1,1)$, $(1,5)$ y $(3,6)$. Esa relación es conocida simplemente como ‘es divisor de’, y tiene infinitos elementos. Por esa razón no se puede definir citándolos todos, sino que hay que hacerlo por medio de una regla, tal como la que se ha dado.

‘Es hijo de la misma madre que’, que designaremos por M, es una relación binaria en el conjunto de los seres humanos vivos. $(a,b)\in M$ y aMb significan que a es hijo de la misma madre que *b*. La relación *S* en el conjunto de los seres humanos vivos 'es padre de' es otra relación binaria. (Andrés)*S*(María) significa que Andrés es padre de María. La relación en el conjunto *N* de los números naturales sin el cero 'es número primo con' es conocida también como 'ser números primos entre sí' y significa que el primer elemento de un par de esa relación no tiene divisores comunes con el segundo que sean distintos de uno. Un par de números naturales de esa relación es (1,2) y otro (10,7).

Relaciones reflexivas

Una relación binaria R definida en un conjunto A es reflexiva si para cada elemento a de A el par (a,a) *es elemento de R.*

O, dicho simbólicamente, *si* $\forall a \in A$ *ocurre que* $(a,a) \in R$, *entonces R es una relación reflexiva*.

La relación $R_2 = \{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$ definida en $A = \{a,b,c\}$ es reflexiva, pues (a,a), (b,b) y (c,c) pertenecen a R_2.

La relación $R_1 = \{(a,b),(b,a),(b,c),(a,a),(a,c)\}$ no es reflexiva, pues ni (b,b) ni (c,c) pertenecen a R_1.

La relación *M* 'es hijo de la misma madre que' en el conjunto de los seres humanos es reflexiva, pues $(a,a) \in M$, que significa que *a* tiene la misma madre que *a*, es cierto para todo ser humano.

La relación *S* 'es padre de' no es reflexiva, pues ningún ser humano es padre de sí mismo, por lo que en *S* no hay pares de la forma (a, a); aunque para no ser reflexiva bastaría con que un solo ser humano no fuera padre de sí mismo.

La relación *D* 'es divisor de' en el conjunto de los números naturales es reflexiva, pues todo elemento de *N* es divisor de sí mismo y, por tanto, $a \in N \Rightarrow (a,a) \in D$. También la relación en *N* 'es múltiplo de' es reflexiva, pues todo número natural es múltiplo de sí mismo.

Relaciones simétricas

Una relación binaria R definida en un conjunto A es simétrica solo si para cada elemento (a,b) *de R también* (b,a) *es elemento de R.*

Dicho de forma simbólica, si $\forall (a,b) \in R$ también $(b,a) \in R$ la relación *R* en *A* es simétrica.

La relación $R_2 = \{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$ definida en $A = \{a,b,c\}$ es simétrica.

La relación M 'es hijo de la misma madre que' es simétrica, pues si a es hijo de la misma madre que b, también b es hijo de la misma madre que a. Es decir, $(a,b)\in M \Rightarrow (b,a)\in M$. La relación D 'ser divisor de' no es simétrica, pues 3 es divisor de 6 y 6 no es divisor de 3. O sea, $(3,6)\in D$, pero $(6,3)\notin D$.

Una relación simétrica puede ser reflexiva o no. Por ejemplo, $R_2=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$ en $A=\{a,b,c\}$ es reflexiva y simétrica. También $R_4=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ es reflexiva y simétrica. 'Es hijo de la misma madre que' es reflexiva y simétrica'.

'Es divisor de' es reflexiva pero no es simétrica.

La relación $R_3=\{(a,a),(b,b)\}$ en $A=\{a,b,c\}$ es simétrica y no es reflexiva, pues $(c,c)\notin R_3$.

La relación $R_1=\{(a,b),(b,a),(b,c),(a,a),(a,c)\}$ no es reflexiva, pues $(b,b)\notin R_1$, y tampoco es simétrica, pues (b,c) es elemento de R_1 y (c,b) no.

Relaciones transitivas

Una relación binaria R definida en un conjunto A es transitiva si ocurre que si (a,b) y (b,c) son elementos de R, también (a,c) es elemento de R.

$R_1=\{(a,b),(b,a),(b,c),(a,a),(a,c)\}$ definida en $A=\{a,b,c\}$ es transitiva, pues, siendo (a,b) y (b,c) elementos de R_1, (a,c) también lo es.

La relación M 'es hijo de la misma madre que' es transitiva, pues si a es hijo de la misma madre que b y b es hijo de la misma madre que c, entonces a es hijo de la misma madre que c. Es decir, si $(a,b)\in M$ y $(b,c)\in M$ entonces $(a,c)\in M$. La relación 'es divisor de' es transitiva, pues si a es divisor de b y b lo es de c, a es divisor de c.

La relaciones $R_2=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$, $R_3=\{(a,a),(b,b)\}$ y $R_4=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ en $A=\{a,b,c\}$ son transitivas. La relación $R_5=\{(a,b),(a,c)\}$ en A también es transitiva, pues no hay ningún par de elementos de R_5 de la forma (x,y), (y,z), por lo que no se puede exigir que haya en R_5 otro de la forma (x,z). O, dicho de otra forma, no hay hipótesis que exija que ocurra la tesis.

Las relaciones transitivas pueden ser reflexivas o no. Por ejemplo, R_1 es transitiva y no es reflexiva, pues ni (b,b) ni (c,c) pertenecen a R_1. R_2 es transitiva y reflexiva, lo mismo que la relación M 'es hijo de la misma madre que'.

También hay relaciones transitivas que son simétricas y otras que no lo son: R_1 es transitiva y no simétrica y R_2 es transitiva y simétrica. 'Es hijo de la misma madre que' es transitiva y simétrica. 'Es divisor de' es transitiva no simétrica.

Relaciones de equivalencia

Una relación binaria en un conjunto A es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Las relaciones $R_2 = \{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$ y $R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ definidas en *A* son relaciones de equivalencia. La relación 'ser hijo de la misma madre' es relación de equivalencia. La relación 'es divisor de' no es relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Si *R* es una relación de equivalencia en un conjunto *A*, y $a \in A$, designaremos por $R(a)$ al conjunto de todos los elementos de *A* relacionados con *a* por esa relación de equivalencia. Es decir, $b \in R(a) \Leftrightarrow (a,b) \in R$. Nótese que, entonces, también $(b,a) \in R$, pues *R* es simétrica. Llamaremos a $R(a)$ *clase de equivalencia de a*. O sea, *clase de equivalencia de a originada por una relación de equivalencia R en A es el conjunto de todos los elementos de A relacionados con a por esa relación de equivalencia.*

Si ocurre que $c \notin R(a)$, donde *c* es un elemento de *A*, entonces en la clase de *c*, $R(c)$, no hay ningún elemento de la clase de *a*, pues de haberlo estaría relacionado con *a* y con *c* y, por tanto, *a* y *c* pertenecerían también a la misma clase, en contra de la hipótesis de que *c* no pertenece a la clase de *a*. Dicho de otra manera, $R(a) \cap R(c) = \varnothing$, pues si un elemento *d* de $R(c)$ está también en $R(a)$ significa que aRd y dRc. Y como *R* es transitiva ocurriría que aRc, en contra de la hipótesis de que $c \notin R(a)$.

Es decir, si $R(a)$ es una clase de equivalencia de *A* y el elemento de *A* $c \notin R(a)$, entonces $R(a) \cap R(c) = \varnothing$. O sea, ningún elemento de *A* pertenece a más de una clase de equivalencia de las originadas por *R*. Pero todo elemento *a* de *A* pertenece a una clase de equivalencia de las originadas por *R*, pues, al menos, aRa, ya que *R* es reflexiva.

El conjunto de todas las clases de equivalencia de *A* originadas por la relación *R* en *A* se llama *conjunto cociente* de *A* originado por la relación *R*, y se designa por A/R.

Se citan de nuevo las características del conjunto cociente *A*/*R*:

1. Cada elemento del conjunto cociente *A/R* es no vacío, pues al menos un elemento de *A* pertenece a cada clase.
2. La intersección de dos clases de equivalencia es el conjunto vacío, o sea, las clases de equivalencia son conjuntos disjuntos.

3. La unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto *A*.

Pero esas son, precisamente, las características de una partición en *A*. Por tanto, el conjunto cociente A/R es una partición de *A*.

Cada relación de equivalencia en un conjunto A origina una partición P en A, que es el conjunto cociente $P = A/R$.

Dicho de otra manera, definir una relación de equivalencia en un conjunto *A* es una forma de clasificar los elementos de *A*.

Por ejemplo, el conjunto cociente de la relación de equivalencia $R_2 = \{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$ definida en $A = \{a,b,c\}$ es

$$A/R_2 = \{\{a,b\},\{c\}\},$$

que es una partición de *A*.

Para obtener esa partición se forma un conjunto con todos los elementos relacionados con *a*: $\{a,b\}$. Se elige después un elemento que no esté en la clase anterior, el *c*, y se forma otra clase con *c* y todos los relacionados con él, en este caso solo el *c*: $\{c\}$. Y así hasta que todos los elementos de *A* estén en alguna de las clases escritas.

El conjunto cociente originado por R_4 es $A/R_4 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.

La relación *M* 'es hijo de la misma madre que' es relación de equivalencia en el conjunto *H* de los seres humanos. Los seres humanos que pertenecen a cada clase de equivalencia del conjunto cociente H/M son hermanos de madre. Los seres humanos que no tienen hermanos forman clases de un solo elemento. Todos los hombres y mujeres vivos han quedado así clasificados.

Por tanto, definir una relación de equivalencia en un conjunto es otra forma de clasificar los elementos de ese conjunto.

Un ejemplo notable de clasificación por medio de clases de equivalencia

En las definiciones de los conjuntos habituales de números se suele utilizar la clasificación por medio de clases de equivalencia. Se expone a continuación el concepto de número racional como ejemplo de esta forma de clasificar.

Se llama fracción a cualquier par ordenado (a,b) de números enteros cuya segunda componente, *b*, no sea el cero. Los pares de números enteros (a,b) que se escriben para que sean fracciones se escriben preferentemente separados por un segmento así: $\frac{a}{b}$, o también a/b. La primera componente, *a*, del par se llama numerador, y la segunda, *b*, denominador. Por ejemplo, son fracciones $2/5$, $4/10$, $14/7$ y $0/1$. No son fracciones $3/0$ ni $0/0$.

Definamos la siguiente relación R en F:

- $\frac{a}{b}$ está relacionado con $\frac{c}{d}$ si $ad = cb$. Se escribe entonces $\frac{a}{b} R \frac{c}{d}$.

Esa relación suele designarse como 'igualdad de los productos cruzados'[3], y es

- *reflexiva,* ya que, cualquiera que sea la fracción $\frac{a}{b}$ ocurre que $\frac{a}{b} R \frac{a}{b}$, pues $ab = ab$.
- *simétrica,* pues $\frac{a}{b} R \frac{c}{d} \Rightarrow ad = cb$, por lo que $\frac{c}{d} R \frac{a}{b}$.
- *transitiva,* pues si ocurre que $\left(\frac{a}{b} R \frac{c}{d}, \frac{c}{d} R \frac{e}{f} \right)$, también ocurre que $\left(ad = cb, cf = ed \right)$. Si se multiplica una igualdad del paréntesis por la otra resulta: $adcf = cbed$. Y si se dividen los dos miembros por cd queda $af = be$, que significa $\frac{a}{b} R \frac{e}{f}$, por lo que R es transitiva.

Como es reflexiva, simétrica y transitiva, R es relación de equivalencia.

Si ahora se elige una fracción cualquiera, por ejemplo $10/4$, su clase de equivalencia debida a R está formada por todas la fracciones relacionadas con $10/4$. Por ejemplo $20/8$ pertenece a la clase de equivalencia de $10/4$, pues $20 \times 4 = 10 \times 8$, y también $5/2$, pues $10 \times 2 = 5 \times 4$. Si se elige otra fracción que no esté relacionada con 10/4, por ejemplo, 1/6, a su clase de equivalencia pertenecen, por ejemplo, 2/12 y 3/18. Y así con el resto de las fracciones. Todas las fracciones cuyo numerador es el cero, como $0/a$ y $0/b$ ($a \neq 0$ y $b \neq 0$) son equivalentes, pues $0 \times b = 0 \times a$. De esa forma se han clasificado todas las fracciones en clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia se llama número racional, que se designa por cualquiera de sus fracciones. Es decir, $20/8$, $10/4$ y $5/2$ designan el mismo número racional. 1/6, 2/12 y 3/18 designan otro. Y $0/1$ y $0/4$ otro. Resulta, pues, que cada número racional puede designarse por un número infinito de fracciones. Pero en todo número racional cuyo numerador no sea el cero hay una fracción formada por números enteros primos entre sí, que se llama fracción irreducible, y es la que suele preferirse para designar el número racional a que pertenece. En los dos primeros ejemplos anteriores esas fracciones son $5/2$ y 1/6. El número racional cuyas fracciones tienen por numerador el cero se designan por 0 (cero).

[3] Y equivale a decir que si se divide a entre b se obtiene el mismo número decimal que si se divide c entre d.

Final

El estudio de las particiones de conjuntos y de las relaciones de equivalencia suele estar incluido en los primeros capítulos de los libros de álgebra. Aquí se ha tratado el tema intentando mostrar su utilidad para la organización del conocimiento y el progreso en la ciencia, y también se ha tratado de llamar la atención sobre el hecho de que las clasificaciones científicas son las clasificaciones de la vida ordinaria, de las que, a lo sumo, son formas más precisas.

Que se reflexione sobre algunos aspectos de la forma de conocer es el objetivo de este artículo y de otros de la sección 'Comentarios técnicos', como los titulados 'Concepto de axioma' y 'Partir y clasificar', el último estrechamente relacionado con este.

