1. Campo electrostático

Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor
Universidad de Salamanca

Carga eléctrica

Al menos desde el siglo VI antes de Cristo se había observado que trozos de ámbar frotados con lana atraen pequeños cuerpos y motas de polvo[1]. Esta propiedad se llamó después por eso *propiedad del ámbar* o *electricidad*, por la palabra griega ηλεκτρον, *electrón*, que significa ámbar[2]. Más tarde se fue observando que también otros cuerpos adquirían por frotamiento la propiedad de atraer o repeler[3]. Este fue todo el conocimiento sobre la electricidad hasta el siglo XVIII. En ese siglo, para explicar esas atracciones y repulsiones, Benjamin Franklin propuso la teoría, hoy abandonada, del *fluido eléctrico*[4]. Según esa teoría, todos los cuerpos admitirían un nivel o *carga* normal de ese fluido. Pero, por frotamiento, ese fluido puede pasar de unos cuerpos a otros. Entonces, unos quedan con más (+) carga de fluido que la normal, y los otros con menos (-). De un cuerpo con más nivel que el normal se dice que tiene carga positiva de fluido, o que está cargado positivamente de fluido, y de un cuerpo con menor nivel que el normal se dice que tiene carga negativa de fluido, o que está cargado negativamente. Del cuerpo que tiene nivel normal se dice que está en estado neutro. Si dos cuerpos tienen nivel de fluido eléctrico superior al normal, o inferior al normal, se repelen. Si uno tiene nivel superior al normal (+), y otro inferior (-), se atraen. Dos cuerpos neutros, o sea, con su nivel normal de fluido, ni se atraen ni se repelen. Por último, si se tocan dos cuerpos, el fluido pasa del cuerpo con más (+) nivel al de menos (-) nivel.

En el mismo siglo XVIII Du Fay[5] propuso que las atracciones y repulsiones eléctricas pueden explicarse si se supone que hay dos clases de propiedades, dos clases de electricidad: una, la que adquiere el vidrio frotado con lana y la de todos los cuerpos a los que repele después de haber sido frotados con lana, que se llamó

1 Se atribuye a Tales de Mileto la primera información de que el ámbar frotado con lana atrae pequeños cuerpos. Tales nació entre 640 y 624 antes de Cristo en Mileto, ciudad de Asia Menor, en la actual Turquía, cerca de la orilla del mar Egeo. Tales fue uno de los siete sabios de Grecia. Murió en 546 a. de C. El ámbar es resina fosilizada. Suele presentar bellos colores y se utiliza en joyería y decoración. Si se frota un bolígrafo de plástico con ciertos tejidos, se puede o conseguir que el bolígrafo atraiga trocitos de papel. Esta atracción es la misma propiedad que la del ámbar.

2 Crisóstomo Eseverri Hualde, *Diccionario Etimológico de Helenismos Españoles*, Ediciones Aldecoa, Burgos 1988.

3 El médico inglés Wiliam Gilbert (Colchester, Essex, 24-5-1544, Londres 30-11-1602 ó 10-12-1603) comunicó que, además del ámbar, otros cuerpos después de frotados adquirían la propiedad de atraer. También experimentó con imanes, y opinó que sus atracciones eran diferentes de la fuerza del ámbar frotado, a la que dio el nombre de “fuerza eléctrica”, fuerza del ámbar.

4 Benjamin Franklin (1706-1790), nació en Boston. Sus experimentos sobre electricidad condujeron también a explicar las tormentas como fenómenos causados por la electricidad de las nubes, y al invento del pararrayos. Fue también un importante político durante los tiempos de la independencia de los Estados Unidos de América.

5 Charles François de Cisternay du Fay (París, 1698 – 1739), de la Academie des Sciences, propuso la hipótesis de las dos clases de electricidad en 1734 .

electricidad vítrea, y otra, la del ámbar frotado con lana y la de todos los cuerpos a los que repele después de frotados con lana, que se llamó *electricidad resinosa*. Con esta hipótesis, *los cuerpos con la misma clase de electricidad se repelen y los que la tienen distinta se atraen*. De los cuerpos que tienen electricidad se dice que están *cargados* de electricidad o que tienen *carga eléctrica*. De los cuerpos que no tienen electricidad se dice que están en *estado neutro*.

Ambas hipótesis, la del fluido eléctrico y la de las dos clases de electricidad, podían explicar las atracciones y repulsiones eléctricas, por lo que convivieron algún tiempo, hasta que el aumento del conocimiento fue dirigiendo las preferencias hacia la teoría de las dos clases de electricidad, que es la que se acepta hoy, y que desarrollaremos en lo que sigue[6].

En el mismo siglo XVIII, Coulomb, con una balanza de torsión, comparó fuerzas entre dos esferillas cargadas. Las fuerzas parecían ser inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia *d* entre los centros de las esferas. Por eso, en 1785, propuso para el módulo de la fuerza entre dos de ellas la fórmula

$$F = \frac{q_1 q_2}{d^2} \tag{1}$$

que contiene, además, la hipótesis de que la fuerza es proporcional al producto de las cantidades de electricidad de las esferas. Para completar la fórmula (1) hay que añadir que la fuerza *F* es de repulsión si las dos cargas son de la misma clase, y de atracción si son de clase distinta. Estos enunciados junto a la fórmula (1) se conocen como *ley de Coulomb*, y siguen siendo confirmados por la experiencia[7].

La fórmula (1) establecía, además, una manera de medir cargas eléctricas. Con ella se definió la *unidad electrostática de cantidad de electricidad* o de *carga eléctrica*, que es "*la carga eléctrica de una esfera de radio despreciable que, separada un centímetro de otra*

---

6 Esta preferencia se debe a que es más fácil explicar lo que actualmente observamos por medio de dos propiedades, que hoy llamamos *electricidad positiva* y *electricidad negativa*. Ambas electricidades aparecen como propiedades de dos únicas partículas estables: del protón, con carga positiva, y del electrón, con carga negativa. No parece que ambas propiedades se deban a un fluido que se pueda separar de esas partículas o que se pueda intercambiar entre protones y electrones. La propiedad de los protones de repelerse entre sí, de los electrones de repelerse entre sí, y de atraerse electrones y protones nunca abandona a esas partículas a las distancias que nos interesan, son propiedades de esas dos porciones de materia, no algo añadido a ellas de lo que puedan desprenderse. Esta es la interpretación actual. Pero, a pesar del abandono de la teoría del fluido eléctrico, han quedado restos de su lenguaje. Uno de ellos es el nombre de *carga* para la cantidad de electricidad. Proviene de nivel o *carga* de fluido. También los nombres de las dos propiedades: electricidad positiva, que se correspondería con mayor (+) nivel de fluido eléctrico, y negativa, que se correspondería con menor (-) nivel. La corriente eléctrica era paso de fluido eléctrico desde los cuerpos más (+) cargados de él, a los menos (-) cargados, es decir, de los positivos a los negativos. Todavía hay quien se refiriere a la corriente eléctrica como fluido eléctrico. Así, la Real Academia Española, en la vigésima segunda edición de su diccionario, da "corriente eléctrica" como significado de "fluido" en su cuarta acepción.

7 El coronel Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) nació en Angoulême, Francia. La unidad internacional de carga eléctrica se llama *coulomb*, en español *culombio*, de símbolo C, en honor a Coulomb. La fórmula que enunció significaba que, según sus medidas, esa fórmula daba la fuerza entre dos esferillas con carga eléctrica (fuera la carga fluido o propiedad de la materia). Enseguida comenzaron a deducirse consecuencias de esa fórmula, que concordaban con lo que se observaba. Cada concordancia era un apoyo a la ley de Coulomb. Esas concordancias con la realidad han confirmado hasta hoy la validez de la ley. La teoría electrostática consiste en consecuencias de solo esa ley.

igual y con la misma carga, ambas situadas en el vacío, es repelida por ella con una fuerza de una dina"[8]. Solo con esta definición y con la medida de fuerzas y distancias puede saberse la carga que tienen dos o más esferillas cargadas (ver problema 1).

Por tanto, las pruebas de que hoy disponemos indican que *la electricidad es una propiedad de la materia*[9], no un fluido ajeno a ella. Las dos clases de electricidad se llaman hoy *electricidad positiva* y *electricidad negativa*. La referencia es la carga del electrón, a la que se asigna signo negativo. Los protones tienen electricidad positiva. No hay razón intrínseca para haber asignado de esta forma los adjetivos *positiva* y *negativa*. La elección es convencional. Podía haberse llamado positiva la carga del electrón y negativa la del protón. En realidad hoy sabemos que son las dos únicas partículas estables con electricidad, con carga eléctrica. Por eso, una definición de electricidad es *propiedad del protón y del electrón que consiste en que dos protones se repelen, dos electrones se repelen, y un protón y un electrón se atraen, con fuerzas que cumplen la ley de Coulomb. La electricidad del protón se llama electricidad positiva y la del electrón electricidad negativa*. Las cantidades de electricidad positiva se expresan por medio de números reales positivos. Las cantidades de electricidad negativa por medio de números reales negativos. Así, la carga del protón es 1.602×10^{-19} C y la del electrón -1.602×10^{-19} C.

Si dos cuerpos que no son protones o electrones se atraen o se repelen según la ley de Coulomb, también se dice de ellos que tienen electricidad o que tienen carga eléctrica. Pero la carga de cada cuerpo es la suma de las cargas de sus protones y electrones, con sus respectivos signos. Si el cuerpo tiene más protones que electrones, esa suma resulta positiva, en cuyo caso se dice que el cuerpo tiene carga positiva. Si tiene más electrones que protones resulta carga negativa. De hecho la forma más frecuente de cargar cuerpos sigue siendo frotar unos con otros. Así electrones de la última capa de los átomos de un cuerpo pasan al otro. El cuerpo que queda con menos electrones que protones queda con electricidad o carga positiva, y el que queda con más electrones que protones con electricidad negativa.

La carga eléctrica de un punto material se llama *carga puntual*. Un *punto material* es una cantidad de materia situada en un punto, es decir, su volumen es cero. Su masa se llama *masa puntual*. El concepto de carga puntual, como el de punto material, es ideal: no existe una cantidad de materia ni, por tanto, una carga eléctrica que no ocupen volumen[10]. Pero el concepto de carga puntual permitirá enunciar la ley de Coulomb de forma precisa, ya que las esferillas que utilizó Coulomb tienden a puntos a medida que se hacen más pequeñas. Con el concepto de carga puntual y la notación vectorial, la ley de Coulomb puede expresarse así (fig. 1):

---

[8] La dina es la unidad de fuerza del Sistema Cegesimal. 1 N=10^5 dinas.

[9] Debe evitarse utilizar *electricidad* para designar *energía eléctrica*. La *electricidad* es una propiedad de la materia, no energía. (En inglés *electricity* se utiliza también como *electric energy*).

[10] El electrón es la partícula cargada estable de menor masa y de menor carga. Su masa es 9.109×10^{-31} kg y su carga -1.602×10^{-19} C. Su radio clásico es 2.8×10^{-15} m.

$$\boldsymbol{F}_{12} = k_0 \frac{q_1 q_2}{R_{12}^3} \boldsymbol{R}_{12} \tag{2}$$

donde q_1 y q_2 son dos números reales que expresan el valor de dos cargas puntuales, cada uno positivo o negativo según designe carga positiva o negativa, y cero si no hay carga; $\boldsymbol{R}_{12}$ es el vector del espacio cuyo origen es el punto que ocupa q_1 y cuyo extremo es el que ocupa q_2; $\boldsymbol{F}_{12}$ es la fuerza sobre q_2 y k_0 es una constante de proporcionalidad, a la que en el sistema electrostático se asigna el valor uno al definir como se ha dicho la unidad electrostática de carga.

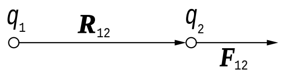

Fig. 1.- Si las dos cargas tienen el mismo signo, $\boldsymbol{F}_{12}$ tiene el sentido de $\boldsymbol{R}_{12}$, o sea, la fuerza es de repulsión. Si las dos cargas tienen signo distinto, $\boldsymbol{F}_{12}$ tiene sentido opuesto al de $\boldsymbol{R}_{12}$, con lo que la fuerza es de atracción.

La fórmula (2) se llama también *ley de Coulomb*, pues equivale al enunciado anterior: que existen dos tipos de carga se expresa al decir que q_1 y q_2 son números reales, que pueden ser positivos, negativos o nulos. La fuerza $\boldsymbol{F}_{12}$ sobre q_2 tiene la dirección de $\boldsymbol{R}_{12}$, la determinada por los puntos que ocupan las cargas. Si q_1 y q_2 tienen el mismo signo, el sentido de $\boldsymbol{F}_{12}$ es el de $\boldsymbol{R}_{12}$, de repulsión; si q_1 y q_2 tienen distinto signo, $\boldsymbol{F}_{12}$ tiene sentido opuesto a $\boldsymbol{R}_{12}$, la fuerza es de atracción. Por tanto la fórmula (2) es la ley de Coulomb expresada con lenguaje vectorial. Si se halla la fuerza sobre q_1 resulta opuesta a la fuerza sobre q_2. Se cumple, por consiguiente, el principio de acción y reacción de Newton: la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2 la ejerce q_2 sobre q_1. El módulo de $\boldsymbol{F}_{12}$ vale

$$F_{12} = k_0 \frac{|q_1 q_2|}{R_{12}^2} \tag{3}$$

Ya que

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}}$$

es un vector cuyo módulo es uno. El símbolo de valor absoluto en $|q_1 q_2|$ es necesario en (3) porque el módulo de un vector es positivo, y el producto $q_1 q_2$ puede ser negativo. F_{12} es directamente proporcional al valor absoluto del producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado del módulo de $\boldsymbol{R}_{12}$, que es la distancia entre ellas.

Nótese que, sabiendo solo el sentido de la fuerza, solo se puede averiguar si dos cargas tienen o no el mismo signo; si la fuerza es de repulsión, el signo de las cargas es el mismo; si es de atracción, el signo es distinto; pero no se puede saber cuál es su signo. Solo si se conoce el signo de una carga se puede conocer el de la otra.

Carece de sentido preguntar por la fuerza entre dos cargas que ocupan el mismo punto, pues habría que dividir por cero, que sería la distancia entre ellas.

El Sistema Internacional de Unidades emplea como unidad de carga eléctrica o de cantidad de electricidad el *culombio*, de símbolo C y nombre internacional *coulomb*, que se define por procedimientos distintos de la ley de Coulomb[11]. Fijada la unidad de carga de esta manera, hay que medir la constante k_0 utilizando la fórmula del módulo de la fuerza entre dos cargas puntuales

$$F_{12} = k_0 \frac{|q_1 q_2|}{R_{12}^2}$$

Para ello se situarían en el vacío dos cargas puntuales de un culombio cada una, separadas un metro, y se mediría el módulo de la fuerza de una sobre la otra:

$$F_{12} = k_0 \frac{1 \times 1}{1^2} = k_0$$

El módulo de esa fuerza es k_0. El valor experimental aceptado hoy es

$$k_0 = 8.9875 \times 10^9 \ \frac{\mathrm{N\ m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

que suele aproximarse por $9 \times 10^9 \ \mathrm{N\ m}^2/\mathrm{C}^2$.

O sea, la fuerza sobre una carga puntual de un culombio debida a otra igual situada a un metro de la primera, ambas en el vacío, es 8.9875×10^9 newtons, casi 9 GN, más de 900 000 toneladas. Con este dato se puede definir el culombio con la ley de Coulomb como *la carga eléctrica puntual que, separada de otra idéntica una distancia de un metro en el vacío, soporta una fuerza de repulsión de* 8.9875×10^9 *newtons*.

Para hacer desaparecer como factor el número π, que formaría parte de muchas fórmulas que se deducen de la ley de Coulomb, se da a k_0 la forma

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

de manera que

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} = \frac{1}{4\pi \times 8.9875 \times 10^9} = 8.8542 \times 10^{-12} \ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\ m}^2}$$

Por eso la Ley de Coulomb suele escribirse también así:

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_{12}^3} \boldsymbol{R}_{12}$$

[11] Según el Sistema Internacional de Unidades los símbolos de las variables deben escribirse en *cursiva*, y los de las unidades en letra recta normal. También los símbolos de los números y de los operadores han de escribirse con tipo recto normal.

ε_0 se llama *permitividad del vacío.*

La dirección de la fuerza de atracción o repulsión no puede ser otra que la determinada por las dos cargas puntuales (fig. 1), pues no hay otra recta única asociada a dos puntos en el espacio tridimensional. Piénsese, por ejemplo, que la fuerza sobre cada carga puntual fuera perpendicular a la recta que determinan las dos cargas; hay infinitas rectas perpendiculares a ella sin ninguna propiedad especial de una sobre otra para ser alguna la preferida. Lo mismo puede decirse de cualquier otra distinta de la que determinan las dos cargas. Resulta pues que, de existir fuerza entre dos cargas puntuales, su dirección solo puede ser la determinada por las dos cargas. Por tanto, la dirección de la fuerza es una propiedad del espacio, que creemos isótropo[12]. De la misma forma, la fuerza con que se atraen dos masas puntuales debe estar sobre la recta determinada por ellas. Es imposible que sea de otra manera en un espacio sin direcciones especiales.

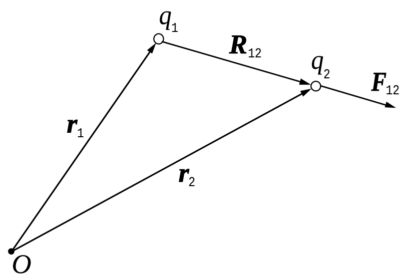

Fig. 2.- Si se conocen los vectores de posición de las dos cargas puntuales, entonces $\boldsymbol{R}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

En los problemas suelen conocerse los puntos que ocupan las dos cargas puntuales, cuyos vectores de posición designaremos por $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$. Entonces, (fig. 2)

$$\boldsymbol{R}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

y la ley de Coulomb toma la forma

$$\boldsymbol{F}_{12} = k_0 \frac{q_1 q_2}{\left|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right|^3}\left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right)$$

La fórmula que hemos llamado *Ley de Coulomb* es el resultado final de las observaciones, y expresa las propiedades que se atribuyen a la carga eléctrica[13]. Sin embargo no existen cargas puntuales en el universo, por lo que la ley de Coulomb debe ser considerada como la interpretación final de la experiencia: como resultado de la observación se puede afirmar que, si existieran cargas puntuales, cumplirían la ley de Coulomb; o, a la inversa, suponiendo que se cumple la ley de Coulomb, todo lo que de ella se deduce está de acuerdo con la realidad relacionada con la carga

[12] El adjetivo *isótropo* se aplica a cuerpos en relación con propiedades que no dependen de la dirección. De ισος, *isos*, igual, y τρόπος, *tropos*, vuelta.

[13] La expresión precisa y cuantificada de lo observado en la naturaleza se llama *ley*. A partir de leyes se construyen las teorías físicas. Ver F. R. Quintela *et al. Qué es una teoría física.* http://electricidad.usal.es/Principal/Circuitos/Comentarios/Temas/QueEsTeoriaFisica.pdf

eléctrica. La teoría que sigue, que se llama Electrostática, son las consecuencias de esa ley. Emplearemos la lógica formal, las matemáticas, para deducir esas consecuencias. O, dicho de otra manera: como la ley de Coulomb define el concepto de carga eléctrica puntual en reposo, buscaremos las propiedades de las cargas eléctricas en reposo a partir de su definición. Eso se llama construir una teoría[14]. Si la ley de Coulomb es cierta en el sentido de que si existieran cargas puntuales se atraerían o repelerían como la ley de Coulomb describe, nuestras deducciones deben tener comprobación experimental. Si no fuera así, la teoría seguiría siendo lógicamente correcta, lo que significa que sus afirmaciones o negaciones se cumplirían en un mundo en el que la ley de partida se cumpliera. Que una teoría esté bien construida o no, no depende de que existan en el universo los objetos que los axiomas definen, sino de si las propiedades de esos objetos han sido correctamente deducidas a partir de los axiomas. Claro que solo son útiles para la descripción del universo las teorías cuyos axiomas son definiciones que traten de describir aspectos de objetos reales. Los teoremas deducidos de esos axiomas pueden entonces comprobarse experimentalmente. Por lo que conocemos hoy, lo que se deduce de la ley de Coulomb, la Electrostática, se cumple en nuestro mundo con gran precisión[15].

Por tanto, para la construcción de la teoría, una carga eléctrica puntual es un número real q que ocupa un punto de vector de posición $\boldsymbol{r}$ del espacio ordinario, de forma que las cargas puntuales cumplen la ley de Coulomb. Más precisamente:

Definición.- *Se llama ley de Coulomb a la aplicación definida por la fórmula*

$$\boldsymbol{F}_{12}\left[(q_1,\boldsymbol{r}_1),(q_2,\boldsymbol{r}_2)\right] = k_0 \frac{q_1 q_2}{\left|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right|^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) \tag{4}$$

donde q_1 *y* q_2 *son números reales que se llaman cargas eléctricas puntuales; los vectores* $\boldsymbol{r}_1$ *y* $\boldsymbol{r}_2$ *de* R^3 *se llaman puntos ocupados por* q_1 *y* q_2 *respectivamente, y* $\boldsymbol{F}_{12}\left[(q_1,\boldsymbol{r}_1),(q_2,\boldsymbol{r}_2)\right]$ *se llama fuerza que* q_1 *ejerce sobre* q_2. En lo que sigue escribiremos $\boldsymbol{F}_{12}$ en lugar de

---

14 Este es, en síntesis, el *método científico* de conocer: a partir solo de los *axiomas*, que son una o más definiciones de objetos, se construye una *teoría*, que es el conjunto de las propiedades de los objetos definidos por los axiomas, deducidas solo de esos axiomas por medio de la lógica. Las propiedades deducidas de los axiomas se llaman *teoremas*. En la elaboración de una teoría puede ser conveniente enunciar definiciones de nuevos conceptos; por eso, una teoría consta de axiomas, de *teoremas* deducidos de los axiomas o de otros teoremas ya demostrados, y de definiciones de nuevos conceptos. Los axiomas sobre los que se construye una teoría no deben ser contradictorios entre sí, pero no se requiere que sean verdaderos en el sentido de que existan los objetos que definen. Sin embargo, en el grado en que esos objetos existan, la teoría sirve para conocer la realidad. Este es el caso de la Electrostática, que es el conjunto de las propiedades de las cargas eléctricas en reposo, definidas por la Ley de Coulomb. Los resultados de la Electrostática concuerdan bien con las observaciones. Ver F. R . Quintela *et al. Qué es una teoría física*, en la sección *Comentarios técnicos* de <http://electricidad.usal.es>. Ver también en la misma sección F. R . Quintela *et al. Concepto de axioma*.

15 Todas las consecuencias de la ley de Coulomb han resultado acordes con la experiencia para distancias mayores que 10^{-16}m. El error del 2 del cuadrado de la distancia entre las cargas parece ser menor de 10^{-15}. Es decir, $h = 2 \pm 10^{-15}$ en la fórmula

$$F_{12} = k_0 \frac{|q_1 q_2|}{R_{12}^h}$$

$\boldsymbol{F}_{12}\left[\left(q_1,\boldsymbol{r}_1\right),\left(q_2,\boldsymbol{r}_2\right)\right]$. Nótese que $\boldsymbol{F}_{12}$ es una aplicación de $\left(R\times R^3\right)^2$ en R^3. R designa aquí el cuerpo de los números reales.

Si las componentes de $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ están en metros, $\boldsymbol{F}_{12}$ en newtons y $k_0 = 8.9875\times 10^9$, entonces se dice que las cargas están medidas en culombios.

De (4) se deduce que la unidad de k_0 es $(\mathrm{N\ m}^2)/\mathrm{C}^2$.

La fuerza que la carga q_2 ejerce sobre q_1 es

$$\boldsymbol{F}_{21}\left[\left(q_2,\boldsymbol{r}_2\right),\left(q_1,\boldsymbol{r}_1\right)\right]=\boldsymbol{F}_{21}=k_0\frac{q_2q_1}{\left|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2\right|^3}\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2\right)$$

resultando que $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$, es decir, se cumple el principio de acción y reacción.

El vector $\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{31}+\cdots+\boldsymbol{F}_{n1}$ se llama fuerza de las cargas q_2, q_3 ,...,q_n sobre q_1.

La anterior definición crea el concepto de carga puntual. La Electrostática es el conjunto de propiedades deducidas de esta definición, que es su único axioma.

Otra propiedad experimental es que *la carga eléctrica de un sistema aislado es constante*. Es decir, la carga eléctrica de un volumen, *suma de la positiva y negativa*, no cambia si no se añade o extrae carga al volumen. Por tanto, si el universo es un sistema aislado, su carga eléctrica no varía, lo que se expresa también diciendo que *la carga eléctrica no se crea, no se destruye ni se transforma*. Esto no impide que partículas sin carga eléctrica puedan originar partículas cargadas; pero, entonces, la carga positiva más la negativa de las nuevas partículas es cero.

Como se ha dicho, todo parece indicar que las únicas partículas estables con carga eléctrica son los protones, todos con la misma carga positiva $1.60219\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, y los electrones, que tienen la carga opuesta a la anterior. Por tanto, la carga de un cuerpo siempre es múltiplo de la carga del protón o de la del electrón. Este hecho se expresa diciendo que *la carga eléctrica está cuantizada*[16].

Campo eléctrico

Sobre las cargas eléctricas se ejercen fuerzas de diversa procedencia. Algunas tienen la propiedad de que la fuerza sobre cada carga puntual q es proporcional a q: si q se duplica se duplica la fuerza sobre q; si se triplica q se triplica la fuerza. Por eso, lo mejor para conocer la fuerza que va a soportar una carga en un punto es conocer la

[16] *Cuantizada* significa *hecha cuantos*, hecha trozos, *troceada*. Según el modelo estándar de las partículas elementales, los protones y neutrones están formados por dos tipos de *quarks*, el *u* (*up*, arriba) y el *d* (*down*, abajo) de cargas +2/3 y -1/3 del valor absoluto de la carga del electrón. Cada protón está formado por dos quarks *u* y uno *d*, por lo que su carga es +1, el valor absoluto de la del electrón. Cada neutrón está formado por un quark *u* y dos *d*, lo que da carga nula. Pero las únicas partículas cargadas elementales aisladas estables siguen siendo los protones y los electrones, por lo que la afirmación de que no hay cargas de partículas estables de valor absoluto menor que la del protón sigue siendo válida.

fuerza que soportaría la unidad de carga en ese punto. Así la fuerza sobre una carga puntual de cualquier valor es el producto de la fuerza sobre la unidad por el número de unidades de la carga. La fuerza por unidad de carga en un punto se llama *campo eléctrico* en ese punto. O sea,

Definición.- Sea una carga eléctrica puntual q situada en un punto, y $\boldsymbol{F}$ una fuerza sobre ella proporcional a q. *Se llama campo eléctrico en el punto que ocupa q a*

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q} \tag{5}$$

Se ve que $\boldsymbol{E}$ es un vector de la dirección de $\boldsymbol{F}$, del mismo sentido que $\boldsymbol{F}$ si q es positiva, y de sentido opuesto si q es negativa; su unidad es N/C (newton por culombio). Por tanto, que sea $\boldsymbol{E}$ el campo eléctrico en un punto significa que la fuerza sobre una carga de un culombio en ese punto es $\boldsymbol{E}$. Por lo que la fuerza sobre cualquier carga de q culombios en ese punto se halla multiplicando q por el campo:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

La definición de campo eléctrico proporciona una forma de medirlo: se sitúa en un punto una carga puntual q, se mide la fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre ella, y (5) da el campo en ese punto, que es la fuerza que corresponde a cada culombio[17].

Campo creado por una caga puntual

Una causa de existencia de campo eléctrico en los puntos de una región es que existan cargas eléctricas. Por ejemplo, una carga puntual q crea campo eléctrico en todos los puntos separados de ella. En efecto, con origen de coordenadas en el punto que ocupa q, hallaremos el campo en el extremo del vector $\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Para ello se sitúa una carga puntual q' en ese punto. La ley de Coulomb da la fuerza sobre q':

$$\boldsymbol{F} = k_0 \frac{qq'}{|\boldsymbol{R}|^3}\boldsymbol{R} = k_0 \frac{qq'}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

por lo que el campo en el punto que ocupa q' es

$$\boldsymbol{E} = \frac{F}{q'} = k_0 \frac{q}{|\boldsymbol{R}|^3}\boldsymbol{R} = k_0 \frac{q}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}),$$

[17] La utilidad de conocer el precio de un quilogramo de un producto es que el precio de cualquier masa de ese producto se obtiene multiplicando esa masa en quilogramos por el precio de un quilogramo. Sabiendo el precio del quilogramo en cada tienda, se sabe cuánto costará cualquier masa de ese producto en cada tienda sin tener que hacer la compra. Por tanto, el precio de cada quilogramo es buena forma de describir el mercado de cada producto. De la misma forma el campo eléctrico en cada punto del espacio sirve para describir ese espacio en relación con las fuerzas sobre cargas eléctricas: para saber la fuerza que una carga sufrirá en un punto basta multiplicar el campo en ese punto por esa carga, sin necesidad de llevar la carga al punto. Si la fuerza sobre q no fuera proporcional a q, carecería de utilidad el concepto de campo eléctrico como se define en la actualidad.

una función vectorial de las coordenadas de los puntos del espacio. Se ve que el campo en cada punto de una superficie esférica de centro en la carga q tiene la dirección del radio de esa superficie esférica, es perpendicular a ella. Si la carga q creadora del campo es positiva, el sentido del campo es hacia fuera de la superficie; si q es negativa es hacia dentro. El módulo del campo es el mismo en todos los puntos de la superficie esférica, tiende a cero a medida que el punto se aleja de la carga, y a infinito si se acerca. Por eso carece de sentido preguntarse por el campo *en* el punto que ocupa la carga q. En ese punto el campo no está definido.

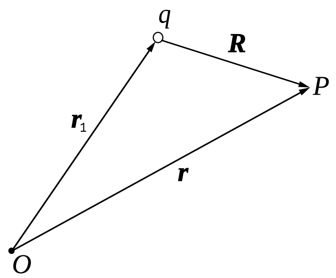

Fig. 3.- La carga q situada en el punto $\boldsymbol{r}_1$ crea campo eléctrico en el punto $\boldsymbol{r}$.

Con cualquier origen de coordenadas O, si $\boldsymbol{r}_1$ es el punto que ocupa q, y $\boldsymbol{r}$ es el punto en el que se quiere hallar el campo que q crea, la fórmula anterior es (fig. 3)

$$\boldsymbol{E}=k_0\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$$

Campo creado por varias cargas puntuales

La fuerza que ejercen sobre q' las cargas puntuales q_1, q_2,...,q_n, situadas en los puntos $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ..., $\boldsymbol{r}_n$ (Fig. 4) es:

$$\boldsymbol{F}=k_0\frac{q_1q'}{R_1^3}\boldsymbol{R}_1+k_0\frac{q_2q'}{R_2^3}\boldsymbol{R}_2+\cdots+k_0\frac{q_nq'}{R_n^3}\boldsymbol{R}_n=$$

$$=\left(k_0\frac{q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)+k_0\frac{q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)+\cdots+k_0\frac{q_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\right)q'$$

proporcional a q'. $\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i$ es el vector con origen en el punto que ocupa q_i y extremo el punto en el que se quiere hallar el campo. $\boldsymbol{r}_i$ es el vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto que ocupa q_i; $\boldsymbol{r}$ tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el punto P en que se quiere hallar el campo. Por tanto el campo eléctrico en P vale

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q'}=k_0\frac{q_1}{R_1^3}\boldsymbol{R}_1+k_0\frac{q_2}{R_2^3}\boldsymbol{R}_2+\cdots+k_0\frac{q_n}{R_n^3}\boldsymbol{R}_n=$$

$$= k_0 \frac{q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}) + k_0 \frac{q_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_2}) + \cdots + k_0 \frac{q_n}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|^3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_n}) =$$

$$= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_n$$

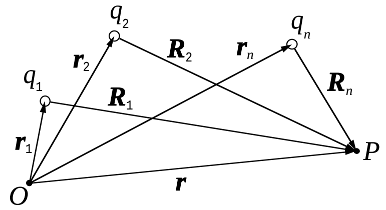

Fig. 4.- *n* cargas puntuales crean campo eléctrico en el punto *P*.

Resulta que el campo en *P* es la suma de los campos que crearían las cargas si cada una estuviera sola.

Densidad de carga

Hasta aquí se han considerado solo cargas puntuales, que son objetos ideales. Ahora nos referiremos a cargas con volumen.

Definición.- Sea q la carga en un volumen v. *Se llama densidad volúmica de carga a la función real* $\rho(x, y, z)$ *definida en cada punto* (x, y, z) *de* v *tal que la carga* q' *de cualquier volumen* v' *contenido en* v *es*

$$q' = \int_{v'} \rho \, \mathrm{d}v'$$

ρ es, por tanto, una función escalar. Su valor en cada punto coincide con

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v}$$

donde el volumen Δv contiene a ese punto e Δq es la carga del volumen Δv. Se ve que la unidad de ρ en el Sistema Internacional de Unidades es el $\mathrm{C/m^3}$.

Una carga q que ocupa un volumen v se llama *distribución volúmica de carga*. Si la densidad volúmica de carga $\rho(x, y, z)$ es una función continua de x, y, z, la distribución se llama distribución *continua* de carga. Las cargas de los electrones y de los protones las suponemos distribuciones de carga en volúmenes[18].

[18] En realidad el protón y el electrón serían las únicas distribuciones continuas de carga existentes en la naturaleza, si lo son; pues las cargas de todos los demás cuerpos cargados son aglomeraciones de protones o electrones, distribuciones no continuas de carga. No obstante, eso no impide obtener fórmulas para el campo y el potencial que crearían cualesquiera distribuciones continuas de carga si estas distribuciones existieran. Pero, además, se verá que las fórmulas deducidas para muchas distribuciones distintas de las del protón y del electrón son útiles en muchos problemas macroscópicos. La razón es que los volúmenes del protón y del electrón son tan pequeños comparados con las dimensiones que se manejan en esos problemas, que puede considerarse una densidad media de carga en cada punto. Se comprobará más adelante con algunos ejemplos que la diferencia de resultados entre considerar distribuciones continuas de carga y aglomeraciones de protones o electrones es despreciable para las situaciones habituales de ingeniería.

La carga del volumen v es

$$q = \int_v \rho \, \mathrm{d}v$$

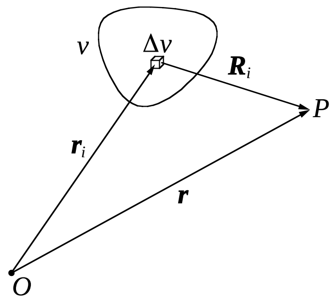

Fig. 5.- Campo eléctrico que una distribución continua de carga crea en P.

Si se divide el volumen v en n partes, cuanto más pequeña sea cada parte Δv_i, la carga que encierra cada Δv_i se aproxima más a $\rho_i \Delta v_i$, donde ρ_i es la densidad de carga en cualquier punto interior de Δv_i. Y cuanto más pequeño sea Δv_i más se parece $\rho_i \Delta v_i$ a una carga puntual, por lo que el campo eléctrico que crea la carga $\rho_i \Delta v_i$ en un punto es

$$\nabla \boldsymbol{E}_i \simeq k_0 \frac{\rho_i \Delta v_i}{R_i^3} \boldsymbol{R}_i = k_0 \frac{\rho_i \Delta v_i}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_i}\right|^3} \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_i}\right)$$

Y el que crea toda la carga de v es

$$\boldsymbol{E} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta v_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} k_0 \frac{\rho_i \Delta v_i}{R_i^3} \boldsymbol{R}_i = k_0 \int_v \frac{\rho \, \mathrm{d}v}{R^3} \boldsymbol{R} = k_0 \int_v \frac{\rho \, \mathrm{d}v}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^3} \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right)$$

$\boldsymbol{R}_i$ es el vector desde cualquier punto de Δv_i al punto P en el que se halla el campo. $\boldsymbol{r}_i$ es el vector desde el origen de coordenadas O a cualquier punto de Δv_i. $\boldsymbol{R}$ es el vector desde cualquier punto de $\mathrm{d}v$ a P. $\boldsymbol{r}'$ es el vector desde O a cualquier punto de $\mathrm{d}v$. Esta integral en general no diverge en los puntos de la distribución; es decir, sí tiene sentido preguntar por el campo creado por la distribución en un punto de la distribución, o sea, por el campo en un punto de un cuerpo cargado creado por su propia carga.

A veces conviene considerar distribuciones superficiales o lineales de carga. La distribución en una superficie S se describe con la *densidad superficial de carga* σ, que es una función escalar, cuya unidad es $\mathrm{C/m^2}$, tal que la carga de la superficie S vale

$$q = \int_S \sigma \, \mathrm{d}S$$

y el campo que crea la distribución en un punto $\boldsymbol{r}$ es

$$\boldsymbol{E} = k_0 \int_S \frac{\sigma \, \mathrm{d}S}{R^3} \boldsymbol{R} = k_0 \int_S \frac{\sigma \, \mathrm{d}S}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^3} \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right)$$

$\boldsymbol{R}$ es el vector desde un punto de dS al punto P en el que se halla el campo. $\boldsymbol{r}'$ es el vector desde el origen de coordenadas O a un punto cada dS.

Una distribución lineal se describe por medio de la *densidad lineal de carga* λ, de unidad C / m, de forma que la carga en una línea de longitud L vale

$$q = \int_L \lambda \, \mathrm{d}L$$

y el campo en un punto $\boldsymbol{r}$,

$$\boldsymbol{E} = k_0 \int_L \frac{\lambda \, \mathrm{d}L}{R^3} \boldsymbol{R} = k_0 \int_L \frac{\lambda \mathrm{d}L}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^3} \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right)$$

$\boldsymbol{R}$ es el vector desde un punto de dL al punto P en el que se halla el campo. $\boldsymbol{r}'$ es el vector desde el origen de coordenadas O a un punto de dL.

No hay en la naturaleza distribuciones superficiales y lineales de carga, pues serían carga sin volumen, pero se verá que son útiles para describir algunas distribuciones reales.

No solo cargas eléctricas en reposo ejercen fuerzas sobre las cargas eléctricas, sino que hay otras causas de fuerzas sobre una carga q' proporcionales a q'. En otras palabras, hay otras causas de campo eléctrico además de las cargas eléctricas en reposo. Por eso, el campo eléctrico *que puede* ser creado por cargas eléctricas en *reposo* se llama *campo electrostático*. En lo que sigue estudiaremos propiedades del campo electrostático.

Ejemplo

Si en cada punto (x, y, z) del vacío existiera un campo eléctrico dado por la fórmula

$$\boldsymbol{E} = k_0 \frac{q}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

donde k_0 es la constante del vacío y q un número real, ese campo sería electrostático, pues es el creado por una carga puntual de valor q situada en el origen de coordenadas. El hecho de que en realidad esté creado o no por una carga puntual es indiferente, pues los efectos sobre otras cargas y, en general, todas las propiedades del campo, se deducen de su fórmula matemática y son, por tanto, independientes de si realmente ha sido creado por una carga puntual o no. Esa es la razón de que se haya definido campo electrostático como campo eléctrico *que puede* ser creado por cargas eléctricas en *reposo*

El campo eléctrico es único en cada punto, pues es la fuerza sobre la unidad de carga puntual en ese punto, y, aunque haya varias fuerzas, la resultante es única.

Definición.- *Líneas de fuerza del campo eléctrico son las líneas del espacio tangentes en cada punto al campo eléctrico en ese punto.*

Dos líneas de fuerza de un campo eléctrico no se cortan, ya que, en el punto en que lo hicieran, sus tangentes serían diferentes, habría dos valores del campo en ese punto, en contra de la unicidad del campo en cada punto.

Por tanto, si $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z,)$ es un vector tangente a una línea de fuerza en uno de sus puntos (x, y, z), y $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ es el campo eléctrico en ese punto, entonces el producto vectorial $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{E}$ vale cero:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

pues el ángulo que forman $\boldsymbol{E}$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ es cero y el seno de ese ángulo también. De (6) resulta

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z},$$

relación que deben cumplir las componentes de cada vector $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ tangente a una línea de fuerza en el punto (x, y, z) de esa línea de fuerza.

Potencial electrostático

Si

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

es el vector de posición de un punto, su módulo es el número real positivo R que vale

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

es un campo escalar definido en todo el espacio excepto en el origen de coordenadas. Su gradiente es[19]

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)\boldsymbol{k}$$

La primera componente del gradiente es

[19] Una función real de variables reales se llama *campo escalar*. Una función vectorial se llama *campo vectorial*. Ver R. C. Redondo *et al. Conceptos de gradiente y de derivada direccional*. http://electricidad.usal.es/Principal/Circuitos/Comentarios/Temas/ConceptoGradiente.pdf

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

De la misma forma

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\,; \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

Por tanto,

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

Utilizando esta identidad, el campo eléctrico de una carga puntual en reposo se puede poner como

$$\boldsymbol{E}=\frac{F}{q'}=k_0\frac{q}{|\boldsymbol{R}|^3}\boldsymbol{R}=-k_0 q\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla\left(k_0\frac{q}{R}\right) \tag{7}$$

Se han introducido k_0 y q dentro del paréntesis porque ∇ significa derivar respecto a x, y, z, y ni k_0 ni q dependen del punto donde se quiera hallar el campo, es decir, no dependen de x, y, z. Resulta

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V$$

donde

$$V=k_0\frac{q}{R}=k_0\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

es una función escalar de x, y, z.

Si un campo vectorial, como en este caso $\boldsymbol{E}$, es gradiente u opuesto del gradiente de un campo escalar, ese campo escalar se llama *potencial* del campo vectorial. Por tanto la función escalar de x, y, z

$$V=k_0\frac{q}{R}$$

es potencial del campo electrostático

$$\boldsymbol{E}=k_0\frac{q}{R^3}\boldsymbol{R}$$

creado por una carga puntual. Pero, como el gradiente es el conjunto ordenado de las derivadas parciales respecto a x, y, z, si al potencial de un campo vectorial se le suma cualquier función C que no dependa de las variables x, y, z, la función que resulta de la suma también es potencial de ese campo vectorial. O sea, que V es potencial de $\boldsymbol{E}$ significa que

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Si C no depende de x, y, z,

$$-\nabla\left(V + C\right) = -\nabla V - \nabla C = -\nabla V = \boldsymbol{E}$$

por lo que también la función

$$V' = V + C$$

es potencial de $\boldsymbol{E}$.

Lo anterior significa que *si un campo vectorial tiene un potencial, tiene infinitos potenciales*. También que *cualquier potencial de un campo vectorial se obtiene de cualquier otro sumando a este una función independiente de x, y, z*. Por eso, la fórmula que da cualquier potencial del campo electrostático creado por una carga puntual es

$$V = k_0 \frac{q}{R} + C$$

donde C es independiente de x, y, z. En efecto,

$$-\nabla V = -\nabla\left(k_0 \frac{q}{R} + C\right) = -\nabla\left(k_0 \frac{q}{R}\right) - \nabla C = -\nabla\left(k_0 \frac{q}{R}\right) = \boldsymbol{E}$$

En resumen, la función escalar

$$V = k_0 \frac{q}{R} + C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C$$

con C independiente de x, y, z, se llama *potencial electrostático* que crea una carga puntual en un punto que dista R de la carga.

C queda determinada si se fija un punto en el que el potencial valga cero. Ese punto se llama entonces *cero del potencial* u *origen de potenciales*. Por ejemplo, si el cero del potencial que crea una carga puntual se fija en un punto que dista R_0 de la carga, entonces, la fórmula anterior queda:

$$0 = k_0 \frac{q}{R_0} + C$$

de donde

$$C = -k_0 \frac{q}{R_0}$$

De forma que el potencial creado por la carga puntual q en cualquier punto que diste de ella R es

$$V = k_0 \frac{q}{R} - k_0 \frac{q}{R_0} = k_0 q\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right) = k_0 q\left(\frac{R_0 - R}{R_0 R}\right)$$

La fórmula

$$V = k_0 q\left(\frac{R_0 - R}{R_0 R}\right)$$

da, por tanto, el potencial que crea una carga puntual q en cualquier punto que dista R de ella, si se conoce la distancia R_0 desde la carga a un punto de potencial cero. Si el punto de potencial cero está en el infinito, el potencial en un punto que dista R de la carga es

$$V = \lim_{R_0 \to \infty} k_0 q\left(\frac{R_0 - R}{R_0 R}\right) = k_0 \frac{q}{R}$$

que es la fórmula más conocida del potencial que crea una carga puntual. Pero solo da ese potencial si el cero del potencial se sitúa en el infinito.

Las fórmulas anteriores se han deducido suponiendo el origen de coordenadas en el punto que ocupa la carga puntual. Si no es así, y $\boldsymbol{r}_1$ es el punto en el que está la carga q (Fig. 3), $\boldsymbol{r}$ el punto P en el que se quiere hallar el potencial, y $\boldsymbol{r}_0$ el origen de potenciales, entonces

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$$

De forma que el potencial creado por la carga puntual q en el punto $\boldsymbol{r}$ es

$$V = k_0 \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} - k_0 \frac{q}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1|}$$

Si se sustituye $\boldsymbol{r}$ por $\boldsymbol{r}_0$, el potencial resulta cero, por ser $\boldsymbol{r}_0$ el origen de potenciales.

El campo creado por varias cargas puntuales en un punto (Fig. 4) es

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q'} = k_0 \frac{q_1}{R_1^3}\boldsymbol{R}_1 + k_0 \frac{q_2}{R_2^3}\boldsymbol{R}_2 + \cdots + k_0 \frac{q_n}{R_2^3}\boldsymbol{R}_n =$$

$$= -\nabla\left(k_0 \frac{q_1}{R_1}\right) - \nabla\left(k_0 \frac{q_2}{R_2}\right) - \cdots - \nabla\left(k_0 \frac{q_n}{R_n}\right) =$$

$$= -\nabla\left(k_0 \frac{q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} + C_1\right) - \nabla\left(k_0 \frac{q_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|} + C_2\right) - \cdots - \nabla\left(k_0 \frac{q_n}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|} + C_n\right) =$$

$$= -\nabla(V_1) - \nabla(V_2) - \cdots - \nabla(V_n) = -\nabla(V_1 + V_2 + \cdots + V_n) = -\nabla V$$

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

Donde $V_1, V_2, \cdots, V_n$ son potenciales creados en ese punto por las cargas q_1, q_2,..., q_n.

Es decir, la suma de sendos potenciales de las cargas es potencial del campo creado por todas ellas. El cero del potencial resultante es, en general, distinto de los ceros de los potenciales de las cargas si estos son distintos entre sí. Pero si los potenciales de todas las cargas tienen su cero en el mismo punto $\boldsymbol{r}_0$ en el que no hay ninguna carga, el cero del potencial que resulta de la suma de esos potenciales está también en $\boldsymbol{r}_0$, pues entonces

$$V_1 = k_0 \frac{q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} - k_0 \frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1|}$$

$$V_2 = k_0 \frac{q_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|} - k_0 \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_2|}$$

$$\cdots$$

$$V_n = k_0 \frac{q_n}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|} - k_0 \frac{q_n}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_n|}$$

y

$$V = k_0 \frac{q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} + k_0 \frac{q_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|} + \cdots + k_0 \frac{q_n}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|} - \left(k_0 \frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1|} + k_0 \frac{q_2}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_2|} + \cdots + k_0 \frac{q_n}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_n|} \right)$$

que tiene el cero en $\boldsymbol{r}_0$, como se comprueba si se sustituye $\boldsymbol{r}$ por $\boldsymbol{r}_0$.

El campo eléctrico creado en un punto por una distribución volúmica de carga es

$$\boldsymbol{E} = k_0 \int_v \frac{\rho\,\mathrm{d}v}{R^3} \boldsymbol{R} = -k_0 \int_v \rho \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \mathrm{d}v = -\nabla\left(k_0 \int_v \frac{\rho\,\mathrm{d}v}{R} \right) = -\nabla\left(k_0 \int_v \frac{\rho\,\mathrm{d}v}{R} + C \right) = -\nabla V$$

donde

$$V = k_0 \int_v \frac{\rho\,\mathrm{d}v}{R} + C$$

se llama potencial electrostático creado por la distribución en ese punto.

De la misma forma, para cargas en superficies o en líneas

$$\boldsymbol{E} = k_0 \int_S \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{R^3} \boldsymbol{R} = -\nabla\left(k_0 \int_S \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{R} \right) = -\nabla\left(k_0 \int_S \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{R} + C \right) = -\nabla V$$

$$\boldsymbol{E} = k_0 \int_L \frac{\lambda\,\mathrm{d}L}{R^3} \boldsymbol{R} = -\nabla\left(k_0 \int_L \frac{\lambda\,\mathrm{d}L}{R} \right) = -\nabla\left(k_0 \int_L \frac{\lambda\,\mathrm{d}L}{R} + C \right) = -\nabla V$$

Donde

$$V = k_0 \int_S \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{R} + C$$

y

$$V = k_0 \int_L \frac{\lambda}{R} \mathrm{d}L + C$$

son los potenciales creados por una distribución superficial y una distribución lineal respectivamente.

Campo eléctrico conservativo

Como hemos visto, cualquiera que sea la distribución de carga que da origen al campo electrostático, existe una función V tal que

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{8}$$

La (8), con signo negativo o sin él, es una propiedad que cumplen muchos campos vectoriales. Se llaman *campos conservativos*. Cada uno es el gradiente o menos el gradiente de una función escalar V, que se llama *potencial* de ese campo. No todos los campos vectoriales son conservativos. Tampoco todos los campos eléctricos. El campo electrostático sí lo es. En lo que sigue obtendremos muchas de sus propiedades solo a partir de (8). Pero, al hacerlo, estamos obteniendo propiedades de cualquier campo eléctrico conservativo, aunque no estuviera creado por cargas eléctricas. Por eso llamaremos campos eléctricos conservativos a los campos eléctricos que cumplan (8), sin preguntarnos por la causa de esos campos. Si $\boldsymbol{E}$ es un campo eléctrico conservativo, su potencial se llama *potencial eléctrico, que es cada campo escalar V que cumple* $\boldsymbol{E} = -\nabla V$.

Como se ha visto, *un campo conservativo tiene infinitos potenciales*, que se diferencian en funciones independientes de x, y, z. La fórmula

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

indica que cada componente del un campo eléctrico conservativo es lo que varía el potencial por cada unidad de longitud que se avanza hacia la parte positiva del eje correspondiente, con signo negativo. Cada componente del campo en un punto tiene, pues, el sentido en el que el potencial decrece[20], y su valor es lo que disminuye el potencial por unidad de longitud. Si el potencial no varía en ese eje, la componente del campo sobre ese eje es cero. Por ejemplo, como

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

si el potencial no depende de x en algún intervalo de x, en ese intervalo ocurre que

$$E_x = 0$$

Y de igual forma para cada eje. *Si el potencial en una región tiene el mismo valor en todos los puntos, el campo es cero en esa región, y viceversa.*

En el caso particular de que el campo en una región sea el mismo en todos los puntos, o sea, que sea independiente de x, y, z, si se halla la integral en la dirección del campo, el ángulo que forman $\boldsymbol{E}$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ vale cero, por lo que

[20] Que un campo eléctrico conservativo tenga el sentido de los potenciales decrecientes se debe a que $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Si fuera $\boldsymbol{E} = \nabla V$, el campo tendría el sentido de los potenciales crecientes.

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = V_A - V_B = \boldsymbol{E}\cdot\int_A^B \mathrm{d}\boldsymbol{l} = El$$

y

$$E = \frac{V_A - V_B}{l}$$

Que, de nuevo, indica que el módulo de un campo eléctrico conservativo es lo que disminuye el potencial por cada unidad de longitud.

Si las derivadas de segundo orden de V son continuas, sus derivadas parciales cruzadas son iguales, y entonces el rotacional del gradiente de V es cero:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \nabla V = 0$$

Se dice por eso que *los campos conservativos son irrotacionales*[21].

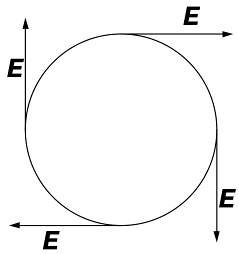

Fig. 6.- Ninguna línea cerrada puede ser línea de fuerza de un campo electrostático.

La integral curvilínea entre dos puntos de un campo conservativo no depende del camino de integración. En efecto, para un campo eléctrico conservativo,

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_A^B (-\nabla V)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = -\int_A^B \mathrm{d}V = V_A - V_B$$

Resulta[22] que la integral curvilínea entre los puntos A y B vale V_A-V_B, independiente de la línea por la que se vaya de A a B. Si A=B la integral curvilínea se llama *circulación* de ***E*** y, entonces, la integral se escribe con un circulito en el centro.

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = V_A - V_A = 0$$

[21] El rotacional de un campo vectorial es el vector que se obtiene del producto vectorial formal $\nabla\times\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$. Si $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$, resulta

$$\nabla\times\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial y\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial V}{\partial z\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x\partial z}\right)\vec{j} - \left(\frac{\partial V}{\partial x\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y\partial x}\right)\vec{j} = 0$$

[22] $\nabla V \mathrm{i} \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{i}\left(\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}x\boldsymbol{j} + \mathrm{d}x\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}V$

O sea, *la circulación de todo campo conservativo es cero*. Eso quiere decir que no hay ninguna línea cerrada en la que las componentes tangenciales a ella de un campo conservativo tengan el mismo sentido en la línea (fig. 6). Por tanto no hay líneas de fuerza de un campo conservativo cerradas.

Superficies equipotenciales

De puntos con el mismo potencial se dice que son equipotenciales. Si ese conjunto de puntos es un volumen se llama volumen equipotencial. Si es una superficie, se llama superficie equipotencial. Por tanto, *superficie equipotencial es una superficie cuyos puntos tienen el mismo potencial*. Todos los puntos (x, y, z) para los que

$$V(x, y, z) = K$$

son puntos equipotenciales de potencial *K*.

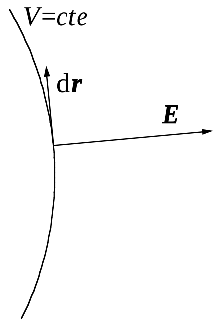

Fig. 7.- El campo es normal a las superficies equipotenciales.

Teorema.- *El campo en cada punto de una superficie equipotencial es perpendicular a ella*.

Demostración.- Cualquier componente tangencial de un campo conservativo en cualquier punto de una superficie equipotencial es la variación del potencial en esa dirección tangencial por unidad de longitud, o sea, la derivada del potencial en esa dirección. Pero esa derivada es nula, pues todos los puntos de la superficie tienen el mismo potencial. Por tanto, el campo en cualquier punto de una superficie equipotencial tiene componente tangencial nula. Eso quiere decir que, si el campo no es cero, ha de ser normal a la superficie.

Trabajo de un campo eléctrico conservativo

La fuerza sobre una carga puntual *q* en un punto en el que el campo eléctrico es $\boldsymbol{E}$ vale

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

Si la carga se mueve entre los puntos *A* y *B*, el trabajo que realiza la fuerza $\boldsymbol{F}$ vale

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

F y ***E*** son la fuerza en la carga y el campo en los puntos por los que pasa la carga. Si el campo es conservativo,

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = V_A - V_B$$

con lo que

$$W = q(V_A - V_B)$$

es independiente del camino recorrido y del potencial que se elija, pues, otro potencial del campo sería de la forma $V' = V + C$, y

$$V_A' - V_B' = \left(V_A + C\right) - \left(V_B + C\right) = V_A - V_B$$

Es decir, la diferencia de potencial entre dos puntos no depende de *C*; o sea, no depende del origen de potenciales elegido.

La fórmula $W = q(V_A - V_B)$ es de gran utilidad, pues facilita hallar el trabajo que realiza el campo eléctrico conservativo al trasladar cargas. Basta conocer la carga que se traslada y la diferencia de potencial entre los puntos en que se traslada. Elimina la necesidad de integrar el campo eléctrico a lo largo de la trayectoria que sigue la carga en el traslado.

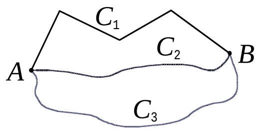

Fig. 8.- El trabajo de un campo eléctrico conservativo es $W = q\left(V_A - V_B\right)$.

De la fórmula se deduce que la unidad de potencial eléctrico es julio por culombio (J/C), que se llama *voltio*, con símbolo V en el Sistema Internacional de Unidades[23]

Si la carga es un culombio, el trabajo coincide con la diferencia de potencial entre *A* y *B*, lo que permite interpretar la *diferencia de potencial entre dos puntos* como *el trabajo que realiza el campo eléctrico conservativo sobre cada culombio que se traslada del primer punto al segundo.*

De

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

se deduce que la unidad de campo eléctrico también es el voltio por metro (V/m)[24].

---

[23] En honor a Alessandro Giuseppe Volta (1745-1827), nacido en Como, Italia. Fue profesor de Física de la universidad de Pavía. Inventó la pila eléctrica o pila *voltaica*.

[24] $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{Cm}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Cm}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Ley de Gauss

Hallaremos el flujo del campo eléctrico creado por una carga puntual a través de una superficie. El campo en un punto de la superficie vale

$$\boldsymbol{E}=k_0\frac{q}{R^3}\boldsymbol{R},$$

donde $\boldsymbol{R}$ es el vector desde el punto que ocupa la carga al punto de la superficie en el que se halla el campo. El flujo a través de una superficie S es

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S k_0\frac{q}{R^3}\boldsymbol{R}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=k_0 q\int_S \frac{\boldsymbol{R}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R^3}=k_0 q\int_S \mathrm{d}\Omega=k_0 q\Omega$$

donde

$$\frac{\boldsymbol{R}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R^3}=\mathrm{d}\Omega$$

es el ángulo sólido bajo el que se ve la superficie $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ desde el punto ocupado por q. Ω es el ángulo sólido bajo el que se ve la superficie S desde ese punto[25]. Si la superficie es cerrada, el vector $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, que es perpendicular a la superficie en cada punto, suele elegirse con el sentido positivo hacia fuera, lo que hace que el ángulo sólido Ω sea siempre un número real positivo si el punto que ocupa la carga es del volumen interior a la superficie, y vale 4π estereorradianes, por lo que

$$\Phi=4\pi k_0 q=4\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

Es decir, con ese sentido elegido para $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, el flujo es positivo (hacia fuera de la superficie) si q es positiva, y negativo (hacia dentro) si q es negativa.

El flujo del campo de varias cargas puntuales a través de la misma superficie vale

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=$$

$$=\int_S \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\cdots+\int_S \boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_n$$

Si la superficie rodea todas las cargas,

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_n=\frac{q_1}{\varepsilon_0}+\frac{q_2}{\varepsilon_0}+\ldots+\frac{q_n}{\varepsilon_0}=\frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{\varepsilon_0}$$

[25] Ver Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor, *Ángulo plano y ángulo sólido*. http://electricidad.usal.es/Principal/Circuitos/Comentarios/Temas/AnguloSolido.php

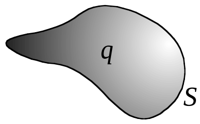

Fig. 9.- El flujo de campo electrostático a través de una superficie cerrada vale la carga en el volumen limitado por la superficie dividida por ε_0.

El flujo del campo creado por una distribución continua de carga se halla dividiéndola en pequeños volúmenes y considerando la carga de cada uno como carga puntual; el flujo del campo de la distribución es la suma de los flujos cuando se hacen tender a cero los volúmenes. Para una superficie cerrada que rodea toda la distribución volúmica,

$$\Phi = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta v_i \to 0}} \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i \Delta v_i}{\varepsilon_0} = \frac{\int_v \rho \, \mathrm{d}v}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

De forma similar para distribuciones superficiales y lineales.

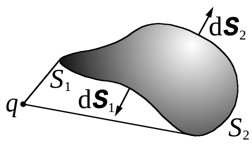

Fig. 10.- El flujo a través de una superficie cerrada debido a carga exterior es cero.

Es decir, cualquiera que sea la carga que da origen al campo, *el flujo de campo electrostático a través de una superficie cerrada vale la carga encerrada en la superficie dividida por* ε_0. Este enunciado se llama *ley de Gauss*. El flujo de campo a través de una superficie cerrada creado por carga exterior a ella es nulo, pues el ángulo sólido es cero (en la figura 10 el ángulo bajo el que se ve S_1 es opuesto al ángulo bajo el que se ve S_2).

Como se ha visto, las cargas producen flujo de campo electrostático a través de la superficie que las rodea; se dice por eso que las cargas son fuentes de flujo de campo electrostático si son positivas, y sumideros si son negativas. Esta expresión proviene de la representación de las líneas de fuerza del campo, que parten de las cargas positivas y terminan en las negativas. En un intento de hacer más intuitivo el concepto de flujo, las líneas de fuerza suelen utilizarse para representarlo, de forma que se identifica el flujo a través de una superficie con el número de líneas de fuerza que atraviesan esa superficie. Pero, en realidad, tal como se han definido las líneas de fuerza, si a través de cualquier superficie pasa una línea de fuerza, pasan infinitas.

El nombre de *fuente* para una carga positiva quiere indicar el hecho de que el flujo a través de una superficie cerrada que la rodee es siempre positivo; o sea, desde una carga positiva siempre parten líneas de fuerza del campo. Por la misma razón, una carga negativa es *sumidero* de flujo o de líneas de fuerza.

La ley de Gauss es una consecuencia de la ley de Coulomb, o mejor, una propiedad de los campos vectoriales cuyos módulos sean inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Por ejemplo, la ley de gravitación de Newton es formalmente idéntica a la ley de Coulomb, con la diferencia de que las masas son siempre números reales positivos o nulos y la fuerza es siempre de atracción[26]. Todos los campos que obedecen esta ley cumplen la de Gauss; también, por tanto, el campo gravitatorio. Podemos preguntarnos por el teorema recíproco; es decir, ¿solo los campos que obedecen la ley del inverso del cuadrado de la distancia cumplen la ley de Gauss? Demostraremos que la respuesta es afirmativa.

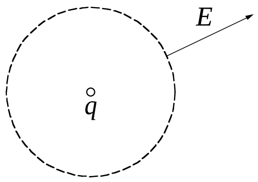

Fig. 11.- De la ley de Gauss se deduce la ley de Coulomb.

Supongamos que el flujo de campo que crea una carga cumple la ley de Gauss, es decir, el flujo a través de cualquier superficie cerrada vale

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

donde q es la carga dentro de la superficie. Sea ahora q una única carga puntual aislada. Consideremos una superficie esférica con centro en la carga y radio R. Si la carga q crea un campo en los puntos de la superficie, por la simetría del espacio, este campo es radial, perpendicular en todo punto a la superficie, y su flujo vale por tanto

$$\Phi = SE = 4\pi R^2 E$$

Pero, como, por hipótesis, se cumple la ley de Gauss, también

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Igualando los últimos miembros,

$$4\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

y

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

Y, como es radial,

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\boldsymbol{R}$$

26 Un ejercicio al alcance del lector es ir construyendo una teoría del campo gravitatorio semejante a la del campo electrostático.

donde $\boldsymbol{R}$ es el vector que va de la carga al punto donde se quiere hallar el campo. Por último, si en ese punto hay una carga puntual q', la fuerza sobre ella vale

$$\boldsymbol{F} = q'\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{R^3}\boldsymbol{R}$$

que es la ley de Coulomb. Y el teorema está demostrado.

Resulta por tanto que *las leyes de Coulomb y de Gauss son equivalentes*. Eso significa que podíamos haber partido de la de Gauss para deducir toda la Electrostática, incluida la ley de Coulomb. De hecho a veces así se hace. Esta es la razón de que se mantenga el nombre de *ley* de Gauss a pesar de que, en la construcción de la Electrostática que parte de la ley de Coulomb, como ha sido la nuestra, es un teorema, pues se deduce de ella. Utilizar como axioma la ley de Gauss tiene la ventaja de que no es necesario partir del concepto ideal de carga puntual para construir la teoría: si existen cargas puntuales se deduce de la ley de Gauss que cumplen la ley de Coulomb, y si no existen, la fuerza entre ellas es una predicción de la teoría para el caso de que existieran, pero no hay que inventárselas. Sin embargo no tenga el lector ningún escrúpulo sobre la perfección de la teoría, sea cual sea el punto de partida. La ventaja de arrancar de la ley de Coulomb es la facilidad de la comprensión de la teoría al iniciar su estudio.

Hay otra forma equivalente de presentar la ley de Gauss. Se utiliza para ello el teorema de la divergencia[27]:

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{v}} \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}v = \frac{q}{\varepsilon_0} = \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}v$$

Comparando el tercero y quinto miembros de las igualdades, como en los dos se integra en el mismo volumen, que además puede ser cualquiera que incluya a la distribución de carga, la igualdad solo es cierta si en todo punto ocurre que

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Recíprocamente, si se cumple la última igualdad también se cumple que el flujo del campo electrostático a través de una superficie cerrada vale

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{v}} \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}v = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

por lo que las fórmulas

[27] El *teorema de la divergencia*, también llamado *teorema de Gauss*, dice que *el flujo de un campo a través de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia del campo en el volumen limitado por esa superficie*, es decir,

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{v}} \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}v$$

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

y

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

son equivalentes. Ambas constituyen la ley de Gauss. La primera se llama *forma integral*, y la segunda *forma diferencial o puntual de la ley de Gauss*, que proporciona la densidad de carga de la distribución que da lugar a un campo electrostático dado:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

La ecuación anterior indica que, si el campo en una región es el mismo en todos los puntos, la densidad de carga en los puntos de esa región es cero. Como

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Sustituyendo en la forma diferencial de la ley de Gauss se obtiene

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9}$$

que se llama *ecuación de Poisson*[28]. La (9) permite de hallar la distribución de carga que da lugar al potencial V:

$$\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 V$$

En las regiones en que no exista carga $\rho = 0$, y la ecuación de Poisson resulta

$$\nabla^2 V = 0 \tag{10}$$

que es la ecuación de Laplace. La (10) se utiliza para hallar la función potencial en las regiones sin carga[29].

---

[28] Simeon Denis Poisson (1781-1840) nació en Pithiviers (Francia), al sur de París. Contribuyó al desarrollo del magnetismo, a la dinámica de sólidos y al cálculo de probabilidades. Fue profesor de la Escuela Politécnica de París, y de la Sorbona.

[29] Como $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$, el producto escalar formal $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ da $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V$, donde $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$ se llama *operador laplaciano* o, simplemente, *laplaciano*, que también se representa por Δ, con lo que la ecuación de Laplace también se escribe ΔV=0, y se lee *laplaciano* o *laplaciana* de V igual a cero.

Pierre Simon, marqués de Laplace, (1749-1827), nació en Beaumont-en-Auge, Normandía, Francia. Hizo aportaciones a la astronomía y a las matemáticas, entre ellas a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Fue alumno de la escuela militar de Beaumont y, trasladado a París en 1769, profesor de matemáticas de la Escuela Militar por recomendación de D'Alembert. Se dedicó también a la política, siendo senador en 1799 y vicepresidente del senado francés en 1803.

Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss facilita el cálculo de campos electrostáticos creados por distribuciones de carga con simetrías esférica o cilíndrica. Exponemos aquí algunos ejemplos.

Campo de distribuciones esféricas de carga

Hallaremos el campo que crea una esfera con densidad volúmica de carga $\rho(R)$ función solo de la distancia R a su centro (Fig. 12).

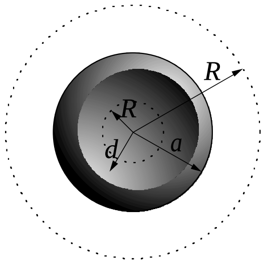

Fig. 12.- Distribuciones esférica de carga.

Por la simetría del espacio, el campo que la distribución crea en un punto interior o exterior a ella que dista del centro la distancia $R \neq 0$ ha de ser radial, es decir, su dirección es la del radio de la esfera. Imagínese una superficie esférica con centro en el centro de la distribución y radio R. Como el campo es radial, es perpendicular en cada punto a esa superficie y tiene el mismo módulo en cada punto de ella, por lo que su flujo a través de ella vale

$$\Phi = \int_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S E\,\mathrm{d}s = E\int_S \mathrm{d}s = 4\pi R^2 E$$

Pero, como la superficie es cerrada, según la ley de Gauss

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

donde q es la carga encerrada por la superficie de radio R. Igualando los últimos miembros, se tiene:

$$4\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

y

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Esta fórmula da el módulo del campo eléctrico en un punto interior o exterior a la esfera. Como el campo tiene la dirección del radio,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

Resulta que el campo en un punto que dista $R \neq 0$ del centro de una distribución esférica cuya densidad de carga en cada punto es solo función de la distancia de ese punto al centro de la esfera es el mismo que crearía una carga puntual igual a toda la encerrada por la superficie esférica de radio R situada en el centro de la esfera[30].

El potencial en el mismo punto es

$$V = -\int E \mathrm{d}R = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}R}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} + C$$

q sigue siendo la carga del volumen limitado por la superficie esférica de radio R. Si el cero del potencial se sitúa en un punto que dista R_0 del centro,

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_0} + C$$

y

$$C = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_0}$$

con lo que el potencial en cualquier punto que dista R del centro es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_0 - R}{R_0 R}$$

Para hallar el campo en cada punto que dista R del centro ha de saberse la carga q encerrada por la superficie esférica de radio R, que puede saberse si se conoce la función $\rho(R)$.

Campo de distribuciones cilíndricas

Supóngase una distribución cilíndrica de carga, de gran longitud, cuya densidad volúmica $\rho\left(R\right)$ en cada punto solo depende de la distancia de ese punto al eje del cilindro. El campo $\boldsymbol{E}$ en un punto exterior que dista R del eje es radial debido a la simetría; por eso es perpendicular y del mismo módulo en todos los puntos de una superficie cilíndrica de radio R, con centro en el eje y longitud L. El flujo a través de las dos bases de esa superficie es cero, pues el vector campo y el vector superficie son perpendiculares allí. Por tanto el flujo a través de toda la superficie cerrada es el que atraviesa la superficie cilíndrica:

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{S}_L} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{S}_L} E \mathrm{d}s = E\int_{\boldsymbol{S}_L} \mathrm{d}s = 2\pi RLE$$

[30] Este resultado no debe hacer creer que la fuerza de una esfera sobre la otra es la misma que si las cargas estuvieran en los centros de las esferas; pues, las partes de las esferas más próximas entre sí se atraen o se repelen con mayor fuerza que las partes más alejadas. Solo si la distancia entre las esferas en muy superior a su radio, la fuerza es aproximadamente la de una carga sobre otra supuestas en el centro de las esferas. La aproximación es mayor cuanto mayor sea esa distancia.

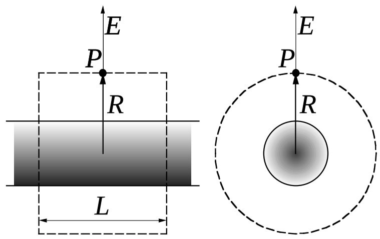

Fig. 13.- Campo de una distribución cilíndrica de carga.

Como la superficie es cerrada,

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

q es la carga del volumen interior a la superficie. En la figura 13 esa superficie se ha dibujado exterior a la distribución, pero puede ser interior. En ambos casos q es la carga del volumen interior a esa superficie. Igualando los últimos miembros de las dos últimas ecuaciones,

$$2\pi RLE = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

y

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 RL}$$

Como el campo es radial,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2 L}\boldsymbol{R}$$

Donde $\lambda = q/L$.

El potencial en el mismo punto es

$$V = -\int E\,\mathrm{d}R = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int\frac{\mathrm{d}R}{R} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln R + C$$

Si el punto de potencial cero dista R_0 del eje del cilindro, se tiene:

$$0 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln R_0 + C$$

De donde

$$C = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln R_0$$

Por tanto,

$$V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln R + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln R_0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_0}{R}$$

que es la fórmula que da el potencial en un punto que dista R del eje del cilindro si el cero está en un punto que dista R_0.

Si el punto en el que se hallan el campo y el potencial es exterior, la carga q es toda la carga de la parte de la distribución de longitud L, cuya carga por unidad de superficie es

$$\lambda = \frac{q}{L}$$

O sea,

$$q = \lambda L$$

Sustituyendo q en las fórmulas del campo y del potencial resultan:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 R^2 L}\boldsymbol{R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{R}$$

$$V = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_0}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{R}$$

De forma similar se hallan el campo y el potencial de una recta con densidad lineal uniforme.

Si se trata de una superficie cilíndrica de radio a, con densidad superficial σ uniforme, como $\lambda = \frac{q}{L} = \frac{2\pi a L\sigma}{L} = 2\pi a\sigma$, sustituyendo se tiene:

$$\boldsymbol{E} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{R}$$

$$V = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{R}$$

Campo de distribuciones planas de gran superficie

Supondremos que la densidad superficial de carga σ es uniforme. Si consideramos una superficie cilíndrica con bases iguales de área S paralelas a la distribución, una a cada lado y equidistantes de ella (Fig. 14), como, por las dimensiones de la distribución plana, el campo es perpendicular a la superficie, su flujo a través de esa superficie cilíndrica es solo el de las dos bases:

$$\Phi = 2ES = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Se ha aplicado la ley de Gauss. Resulta que

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

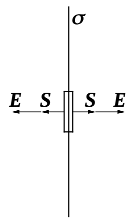

Fig. 14.- Campo de una gran distribución plana.

Si σ es positiva el campo tiene el sentido que se aleja de la superficie en los dos lados de ella, y si es negativa sentido hacia la superficie.

Imposibilidad de equilibrio estable

Teorema.- *No existe ningún punto en el que una carga puntual sometida exclusivamente a campo electrostático permanezca en equilibrio estable.*

Demostración.- Equilibrio estable de una carga en un punto significa que, si la carga se separa ligeramente de él, la fuerza que el campo ejerce sobre ella la empuja hacia ese punto. Eso implica que, para confinar en un punto una carga puntual positiva, los campos creados por todas las demás (excluida ella) en todos los puntos de alguna superficie cerrada alrededor de ese punto han de ser no nulos y dirigirse a ese punto, hacia dentro de la superficie cerrada, única forma de confinar allí la carga. Pero, si es así, el flujo a través de esa superficie cerrada no es cero, pues el campo tiene sentido hacia dentro en todos los puntos de la superficie, lo que obliga a que, según la ley de Gauss, la carga en el interior de la superficie no sea cero, en contra de la hipótesis. Para confinar una carga negativa el campo en cada punto de la superficie esférica ha de tener sentido hacia fuera. Eso implica, de nuevo, que su flujo a través de esa superficie cerrada no es cero, aunque no hay carga en el interior del volumen limitado por la superficie, lo que tampoco puede ocurrir según la ley de Gauss.

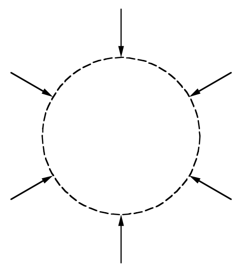

Fig. 15.- El campo electrostático en los puntos de una superficie esférica sin carga dentro no puede tener sentido hacia dentro en cada punto o sentido hacia fuera en cada punto.

Esta propiedad tiene una consecuencia importante, y es que cargas eléctricas sometidas exclusivamente a sus propias fuerzas electrostáticas están en continuo movimiento relativo, pues cada una está solo sometida al campo electrostático de las demás y, por tanto, no hay para ella ningún punto con equilibrio estable[31].

Problemas

1.- Se quiere averiguar, en unidades electrostáticas, las cargas q_1, q_2 y q_3 de tres esferillas de radios despreciables. Para ello se sitúan la 1 y la 2 con sus centros separados 0.5 cm y la tercera muy alejada para que su fuerza sobre las anteriores sea despreciable; se mide la fuerza entre las dos primeras, que resulta de atracción, de 8 dinas. La 1 y la 3 separadas la misma distancia se repelen con 5 dinas con la 2 muy alejada; y la fuerza entre la 2 y la 3 separadas también 0.5 cm con la 1 muy alejada es de 7 dinas. Hallar las cargas de las esferillas.

Solución

Si q_1, q_2 y q_3 son los valores absolutos de las cargas, basta resolver el sistema

$$8 = \frac{q_1 q_2}{0.5^2}; \quad 5 = \frac{q_1 q_3}{0.5^2}; \quad 7 = \frac{q_2 q_3}{0.5^2}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda y despejando queda: $q_2 = (8/5)q_3$, que, sustituida en la tercera da $q_2 = (8/5)q_3^2 = 7 \times 0.5^2$; es decir,

$$q_3 = \sqrt{\frac{7 \times 5 \times 0.5^2}{8}} \simeq 1.05\,\text{ues}; \quad q_2 = \frac{8}{5} q_3 = \frac{8}{5}\sqrt{\frac{7 \times 5 \times 0.5^2}{8}} \simeq 1.67\,\text{ues}$$

$$q_1 = \frac{5 \times 0.5^2}{q_3} \simeq 1.20\,\text{ues}$$

q_1 y q_3 son del mismo signo (ambas positivas o ambas negativas) y q_2 de signo distinto al de ellas.

2.- Hallar la fuerza que una carga puntual de $3\,\mu\text{C}$ en el punto $(3,-1,-2)$ del vacío ejerce sobre otra puntual de $2\,\mu\text{C}$ en el punto $(1,-1,\ 2)$ también del vacío. Hallar la distancia entre las dos cargas. Las coordenadas están dadas en metros.

Solución:

$$\boldsymbol{F}_2 = k_0 \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) =$$

$$= 8.9875 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{\left[(1-3)^2 + (-1+1)^2 + (2+2)^2\right]^{3/2}} \left[(1-3)\boldsymbol{i} + (-1+1)\boldsymbol{j} + (2+2)\boldsymbol{k}\right] \simeq$$

[31] Lo mismo ocurre con el campo gravitatorio, que él solo no produce ningún punto con equilibrio estable para las masas. Por eso la única forma de estar los cuerpos celestes es en movimiento permanente, no existe ninguna posición en la que puedan mantenerse quietos unos respecto a otros.

$\simeq$ -0.0012058***i***+ 0***j***+ 0.0024116***k***

$$d=\left|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right|=\sqrt{(1-3)^2+(-1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}\simeq 4.47\,\mathrm{m}$$

3.- Hallar el módulo de la fuerza del problema anterior y, de nuevo, su valor, si se duplica la distancia entre las cargas, y si se triplica.

Solución:

$$F_1=k_0\frac{|q_1q_2|}{R_1^2}=8.99\times10^9\,\frac{3\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{20}\simeq2.70\times10^{-3}\,\mathrm{N}=2.70\ \mathrm{mN}$$

$$F_2=k_0\frac{|q_1q_2|}{R_2^2};\qquad \frac{F_1}{F_2}=\frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$$F_2=F_1\frac{R_1^2}{R_2^2}=F_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=F_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{F_1}{4}\simeq\frac{2.6963}{4}\simeq0.67\,\mathrm{mN}$$

$$F_3=F_1\frac{R_1^2}{R_3^2}=F_1\left(\frac{R_1}{R_3}\right)^2=F_1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{F_1}{9}\simeq\frac{2.667}{9}\simeq0.30\ \mathrm{mN}$$

4- Hallar la fuerza que una carga puntual de $-3\,\mu\mathrm{C}$ situada en el punto $(3,-1,-2)$ ejerce sobre otra de $2\,\mu\mathrm{C}$ situada en el punto $(1,-1,\ 2)$, las dos en el vacío. Las distancias están dadas en metros. Hallar el módulo de la fuerza.

Solución:

$$\boldsymbol{F}_2=k_0\frac{q_1q_2}{\left|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right|^3}\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)=$$

$$\simeq 8.9875\times10^9\,\frac{-3\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{\left[(1-3)^2+(-1+1)^2+(2+2)^2\right]^{3/2}}\left[(1-3)\boldsymbol{i}+(-1+1)\boldsymbol{j}+(2+2)\boldsymbol{k}\right]\simeq$$

$$\simeq 0.0012058\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}-0.0024116\boldsymbol{k}$$

$$F_2=k_0\frac{|q_1q_2|}{d^2}\simeq8.9875\times10^9\,\frac{3\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{20}\simeq2.70\times10^{-3}\,\mathrm{N}=2.70\ \mathrm{mN}$$

5.- Hallar el campo eléctrico que la carga de $2\mu\mathrm{C}$ del problema anterior crea en el punto que ocupa la de $-3\mu\mathrm{C}$. Hallar la fuerza sobre la de $-3\mu\mathrm{C}$.

Solución:

$$\boldsymbol{E} = k_0 \frac{q_2}{\left|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right|^3}\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right) \simeq$$

$$\simeq 8.99 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-6}}{\left[(3-1)^2 + (-1+1)^2 + (-2-2)^2\right]^{3/2}}\left[(3-1)\boldsymbol{i} + (-1+1)\boldsymbol{j} + (-2-2)\boldsymbol{k}\right] \simeq$$

$$\cong 401.933\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 803.866\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = q_1\boldsymbol{E} \simeq -3 \times 10^{-6}\left[401.933\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 803.866\boldsymbol{k}\right] \simeq$$

$$\simeq -0.0012\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0.0024\boldsymbol{k}$$

6.- Dos cargas puntuales idénticas en el vacío separadas 0.5 m se repelen con 20 N. Hallar su valor.

Solución:

$$F = k_0 \frac{q^2}{R^2}; \qquad q = \sqrt{\frac{FR^2}{k_0}} = \sqrt{\frac{20 \times 0.5^2}{8.9875 \times 10^9}} \simeq \pm 2.359 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \simeq \pm 23.59\,\mu\mathrm{C}$$

7.- Sabiendo que $1\,\mathrm{N} = 10^5$ dinas, averiguar a cuántas unidades electrostáticas (ues) de carga eléctrica equivale un culombio.

Solución:

La fuerza con que dos cargas puntuales de una unidad electrostática de carga cada una, separadas un centímetro, se repelen es 1 dina=10^{-5} N. Es decir, en

$$F = k_0 \frac{q^2}{R^2}$$

si F vale 1 dina=10^{-5} N y R=1 cm, los culombios que vale q son una unidad electrostática de carga

$$q = \sqrt{\frac{FR^2}{k_0}} = \sqrt{\frac{10^{-5} \times 0.01^2}{8.89 \times 10^9}} \simeq 3.35 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}$$

Por tanto, el número de unidades electrostáticas de cada culombio es

$$1\,\mathrm{C} = \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{8.89 \times 10^9}{10^{-5} \times 0.01^2}} \simeq 2.98 \times 10^9 \simeq 3 \times 10^9\,\mathrm{ues}$$

8.- En el estado fundamental del hidrógeno su electrón gira alrededor del protón en una órbita de $5.3 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} = 53\,\mathrm{pm}$ de radio. Suponiendo las dos partículas puntuales, hallar por separado las fuerzas de atracción debidas a la carga eléctrica y a la masa. La masa del electrón es $m_e \simeq 9.1\times10^{-31}\,\text{kg}$ y la del protón $m_p \simeq 1.67\times10^{-27}\,\text{kg}$. La constante de gravitación es $G = 6.65\times10^{-11}\,\dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$. Hallar la velocidad tangencial del electrón y el número de vueltas que da por segundo alrededor del núcleo.

Solución:

$$F_q = k_0\frac{q^2}{d^2} \simeq 8.9875\times10^9\,\frac{(1.602\times10^{-19})^2}{(53\times10^{-12})^2} \simeq 8.211\times10^{-8}\,\text{N}$$

$$F_m = G\frac{m_e m_p}{d^2} \simeq 6.65\times10^{-11}\,\frac{9.1\times10^{-31}\times1.67\times10^{-27}}{(53\times10^{-12})^2} \simeq 3.6\times10^{-47}\,\text{N}$$

$$\frac{F_q}{F_m} \simeq \frac{8.211\times10^{-8}}{3.6\times10^{-47}} \simeq 2.3\times10^{39}$$

Es decir, la fuerza de atracción de las masas es 39 órdenes de magnitud menor (hasta la primera cifra significativa hay 38 ceros después de la coma) que la de las cargas. Por eso no se considera la atracción de las masas en estos problemas.

La velocidad tangencial debe producir una fuerza centrífuga que equilibre la de atracción:

$$F_q = \frac{m_e v^2}{d}$$

$$v = \sqrt{\frac{F_q d}{m_e}} \simeq \sqrt{\frac{8.211\times10^{-8}\times53\times10^{-12}}{9.1\times10^{-31}}} \simeq 2.19\times10^6\,\text{m / s} = 0.73\times10^{-2}c$$

menos de una centésima de la velocidad c de la luz.

$$\omega = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{F_q}{m_e d}} \simeq \sqrt{\frac{8.211\times10^{-8}}{9.1\times10^{-31}\times53\times10^{-12}}} \simeq 4.13\times10^{16}\,\text{rad / s} =$$

$$= \frac{4.13\times10^{16}}{2\pi}\,\text{vueltas / s} \simeq 6.57\times10^{15}\,\text{vueltas / s}$$

9.- Hallar el campo eléctrico y el campo gravitatorio que el protón del átomo de hidrógeno crea en un punto de la órbita del electrón en el estado fundamental.

Solución:

Si suponemos el protón como una partícula esférica,

$$E = k_0\frac{q}{d^2} \simeq 8.9875\times10^9\,\frac{1.602\times10^{-19}}{\left(5.3\times10^{-11}\right)^2} = 5.12566\times10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{C}} = 512.566\,\frac{\text{GN}}{\text{C}}$$

$$g = G\frac{m_p}{d^2} \simeq 6.65\times 10^{-11}\frac{1.67\times 10^{-27}}{\left(5.3\times 10^{-11}\right)^2} \simeq 3.954\times 10^{-17}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 39.54\ \frac{\mathrm{aN}}{\mathrm{kg}}$$

10.- Una carga puntual q está situada en el origen de coordenadas. Hallar los potenciales que crea cuyos ceros estén en el punto (1, 1, 1) y en el infinito respectivamente. ¿Existe potencial con el cero en el punto que ocupa la carga?

Solución

El potencial que crea una carga puntual en el punto (x, y, z) es

$$V = k_0\frac{q}{R} + C = k_0\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C$$

En el punto (1, 1, 1) el potencial vale cero:

$$0 = k_0\frac{q}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} + C$$

De donde

$$C = -k_0\frac{q}{\sqrt{3}}$$

Por tanto el potencial buscado es

$$V = k_0\frac{q}{R} - k_0\frac{q}{\sqrt{3}} = k_0\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - k_0\frac{q}{\sqrt{3}}$$

Que el cero del potencial esté en le infinito se expresa así:

$$0 = \lim_{x,y,z\to\infty}\left(k_0\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C\right) = 0 + C$$

Por tanto C=0, y el potencial con el cero en el infinito es

$$V = k_0\frac{q}{R} = k_0\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Para el potencial con el cero en el punto (0,0,0) que ocupa la carga debería ocurrir que

$$0 = k_0\frac{q}{\sqrt{0^2+0^2+0^2}} + C$$

Como el primer término del segundo miembro carece de significado (división por cero), no hay ningún valor de C que haga que se cumpla la igualdad, por lo no existe potencial con el cero en el punto que ocupa la carga puntual.

11.- Dos cargas puntuales de $10\ \mu\text{C}$ cada una están separadas 4 m. Hallar la energía necesaria para conseguir que la distancia entre las dos sea 1 m.

Solución:

La energía que se pide coincide con el trabajo que realiza el campo que crea una carga al llevar la otra desde 1 m a 4 m de la primera:

$$W = q\left(V_1 - V_4\right) = q\left(k_0 \frac{q}{r_1} + C - k_0 \frac{q}{r_4} - C\right) \simeq \left(10\times 10^{-6}\right)^2 k_0 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) \simeq 0.674\ \text{J}$$

12.- Hallar el potencial que crea una distribución esférica de carga de radio R y densidad volúmica de carga ρ dependiente solo de la distancia $r<R$ al centro de la esfera. Ídem si ρ no depende de r. Suponer el origen de potenciales en el infinito.

Solución:

Como se vio, el potencial en un punto que dista r_0 del centro es el que crea la carga q de la esfera de radio r_0, situada esa carga en el centro de la esfera. Si $r < R$,

$$V(r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\int_0^v \rho\, \mathrm{d}v}{r_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\int_0^{r_0} \rho 4\pi r^2\, \mathrm{d}r}{r_0} = \frac{1}{\varepsilon r_0}\int_0^{r_0} \rho r^2\, \mathrm{d}r$$

Se ha utilizado que el volumen de una esfera de radio r es $v = \left(4/3\right)\pi r^3$ y, por tanto, $\mathrm{d}v = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$.

En un punto en el que $r_0 > R$,

$$V(r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\int_0^v \rho\, \mathrm{d}v}{r_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\int_0^{R} \rho 4\pi r^2\, \mathrm{d}r}{r_0} = \frac{1}{\varepsilon r_0}\int_0^{R} \rho r^2\, \mathrm{d}r$$

Si ρ es uniforme y $r_0 < R$,

$$V(r_0) = \frac{1}{\varepsilon r_0}\int_0^{r_0} \rho r^2\, \mathrm{d}r = \frac{\rho}{\varepsilon r_0}\int_0^{r_0} r^2\, \mathrm{d}r = \frac{\rho}{\varepsilon r_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{r_0} = \frac{\rho r_0^2}{3\varepsilon}$$

Si ρ es uniforme y $r_0 > R$,

$$V(r_0) = \frac{1}{\varepsilon r_0}\int_0^{R} \rho r^2\, \mathrm{d}r = \frac{\rho}{\varepsilon r_0}\int_0^{R} r^2\, \mathrm{d}r = \frac{\rho}{\varepsilon r_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r_0}$$

13.- Una esfera de radio R tiene una carga q de densidad ρ uniforme. Hallar el potencial en un punto que dista r_0 del centro de la esfera, y en el centro de la esfera.

Solución:

La densidad de carga es

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

Utilizando las fórmulas del problema anterior, si $r_0 < R$,

$$V(r_0) = \frac{\rho r_0^2}{3\varepsilon} = \frac{\frac{3q}{4\pi R^3} r_0^2}{3\varepsilon} = \frac{q r_0^2}{4\pi\varepsilon R^3}$$

Si $r_0 > R$,

$$V(r_0) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r_0} = \frac{\frac{3q}{4\pi R^3} R^3}{3\varepsilon r_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_0}$$

El mismo valor que si toda su carga estuviera en el centro.

En el centro de la esfera $r_0 = 0 < R$. Por tanto hay que utilizar la penúltima fórmula con $r_0 = 0$, resultando cero el potencial en el centro de la esfera.

14.- Hallar la densidad de carga ρ que da lugar al potencial $V = 5x^2yz + 8z + 3$. Hallar $\rho(0,0,1)$. Hallar el campo eléctrico, y su módulo en (0, 0, 0) y en (1, 1, 1). Hallar la derivada de V en esos dos puntos en la dirección del vector (-1, 0, 2) y cada componente del campo en esos dos mismos puntos paralela al vector (-1, 0, 2).

Solución:

$$\rho(x,y,z) = -\varepsilon_0 \Delta V = -10yz\varepsilon_0$$

$$\rho(0,0,1) = -10\varepsilon_0 = -10 \times 8{,}8542 \times 10^{-12} = -8{,}8542 \times 10^{-11}\ \mathrm{C/m^3} = -88{,}542\ \mathrm{pC/m^3}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k} = -10xyz\boldsymbol{i} - 5x^2z\boldsymbol{j} - \left(5x^2y + 8\right)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{E}(0,0,0) = -8\boldsymbol{k};\ E(0,0,0) = 8\ \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{E}(1,1,1) = -10\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 13\boldsymbol{k};\ E(1,1,1) = 7\sqrt{6} \simeq 17.15\ \mathrm{V/m}$$

La derivada de V en la dirección y sentido de un vector es la componente del campo eléctrico en la dirección de ese vector. Ambas expresiones designan el mismo concepto[32]. La componente del campo en la dirección del vector (-1, 0, 2) es el producto escalar del campo por el vector unitario de esa dirección:

$$E(0,0,0)_{(-1,0,2)} = (0,0,-8)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{0}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{16}{\sqrt{5}} \simeq -7.16\ \mathrm{V/m}$$

[32] Ver Roberto C. Redondo Melchor, Norberto Redondo Melchor, Félix Redondo Quintela, *Conceptos de gradiente y de derivada direccional*. En la sección 'Comentarios técnicos' de http://electricidad.usal.es

$$E\left(1,1,1\right)_{(-1,0,2)}=\left(-10,-5,-13\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{0}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{10}{\sqrt{5}}-\frac{26}{\sqrt{5}}\simeq-7.16\text{ V / m}$$

15.- En el problema anterior, hallar la superficie equipotencial de 2 V y la que pasa por el origen de coordenadas. Hallar el trabajo que realiza el campo cuando se traslada una carga puntual de $5\ \mu\text{C}$ de la primera superficie a la segunda, y cuando se traslada la misma carga entre el punto (1, 1, 1) y el (1, 0, -3). Encontrar dos puntos que pertenezcan a la superficie equipotencial de 2 voltios y uno que no.

Solución:

La superficie equipotencial de 2 V es $5x^2yz+8z+3=2$, o sea, $5x^2yz+8z+1=0$. Cada punto (x,y,z) para el que se cumpla esa igualdad es un punto de esa superficie equipotencial.

El potencial del origen de coordenadas es $V\left(0,0,0\right)=3\text{V}$. Por tanto, la superficie equipotencial que pasa por él es $5x^2yz+8z+3=3$, o sea, $5x^2yz+8z=0$.

$$W_1=q\left(2-3\right)=-5\times10^{-6}\text{J}=-5\ \mu\text{J}$$

$$W_2=q\left[V\left(1,1,1\right)-V\left(1,0,-3\right)\right]=185\times10^{-6}\text{J}=185\ \mu\text{J}$$

Si se hace x=y=0 en la superficie de 2 V resulta $8z+1=0$, y $z=-1/8$. Por tanto el punto (0,0,-1/8) es un punto de esa superficie equipotencial. Si se hace x=0 e y=1, queda también $8z+1=0$ y $z=-1/8$, por lo que el punto (0,1,-1/8) es también de esa superficie equipotencial.

El punto (0,0,0) no pertenece a la superficie de potencial 2 V, pues, al sustituir, la ecuación no se cumple.

16.- Comprobar que el campo $\boldsymbol{E}=-10xyz\boldsymbol{i}-5x^2z\boldsymbol{j}-\left(5x^2y+8\right)\boldsymbol{k}$ es irrotacional y hallar su potencial si se quiere que el potencial del origen de coordenadas sea -3 V.

Solución:

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\left(5x^2-5x^2\right)\boldsymbol{i}+\left(10xy-10xy\right)\boldsymbol{j}+\left(10xz-10xz\right)\boldsymbol{k}=0$$

Como $-\dfrac{\partial V}{\partial x}=-10xyz$, resulta que

$$V=\int10xyz\,\mathrm{d}x+f_1\left(y,z\right)=5x^2yz+f_1\left(y,z\right)$$

Derivamos V respecto a y e igualamos a menos la segunda componente de ***E***:

$$5x^2z + \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = 5x^2z\,; \quad \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = 0\,; \quad f_1(y,z) = f_2(z).$$

Si se sustituye en V queda:

$$V = 5x^2yz + f_2(z).$$

Derivando respecto a z e igualando a menos la tercera componente de ***E*** se obtiene

$$5x^2y + \frac{\mathrm{d}f_2(z)}{\mathrm{d}z} = 5x^2y + 8\,; \quad \frac{\mathrm{d}f_2(z)}{\mathrm{d}z} = 8\,; \quad f_2(z) = 8z + C.$$

Sustituyendo queda:

$V = 5x^2yz + 8z + C$. Puede comprobarse que el opuesto de gradiente de V es ***E***.

Como $V(0,0,0) = -3$, sustituyendo, se obtiene -3=C. Por tanto el potencial es

$$V = 5x^2yz + 8z - 3.$$

17.- Hallar la densidad de carga que da lugar al campo del problema anterior.

Solución:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \left[-10xyz\boldsymbol{i} - 5x^2z\boldsymbol{j} - \left(5x^2y + 8\right)\boldsymbol{k}\right] = -10\varepsilon_0 yz$$

Si se parte del potencial,

$$\rho = -\varepsilon_0 \Delta V = -\varepsilon_0 \Delta\left(5x^2yz + 8z - 3\right) = -10\varepsilon_0 yz$$

18.- El rotacional de un campo vectorial que es gradiente de un campo escalar es cero. Dicho de otra forma: si el rotacional de un campo vectorial no es cero, es que ese campo vectorial no es gradiente de ninguna función escalar. Comprobar que el rotacional del campo $\vec{E} = 3x\vec{i} + 2y\vec{k}$ no es cero. Pero, a pesar de ello, intentar hallar una función potencial de ese campo aplicando el procedimiento de los problemas anteriores. Comprobar que la función así obtenida no es potencial del campo vectorial.

Solución:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & 0 & 2y \end{vmatrix} = (y-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (0-0)\vec{i} = 2\vec{i} \neq 0$$

Aunque $\nabla \times \vec{E} \neq 0$, supongamos que existe una función $V(x,y,z)$ que es potencial de $\vec{E}$. O sea, que

$\dfrac{\partial V}{\partial x} = -3x$. Eso significa que $V = -\dfrac{3x^2}{2} + f_1(y,z)$.

También $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = 0$. Por tanto $f_1(y,z) = f_2(z)$, y $V = -\dfrac{3x^2}{2} + f_2(z)$.

Y, por último, que $\dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{\partial f_2(z)}{\partial z} = -2y$. De donde $f_2(z) = -2yz + C$.

Por tanto la función que resulta es $V = -\dfrac{3x^2}{2} - 2yz + C$. Pero esa función no es potencial de $\vec{E}$. En efecto, $-\nabla V = 3x\vec{i} + 2z\vec{j} + 2y\vec{k} \neq \vec{E}$.

19.- Hallar el campo eléctrico de una recta cargada con una densidad lineal de carga eléctrica uniforme λ en un punto que no pertenezca a la recta.

Solución:

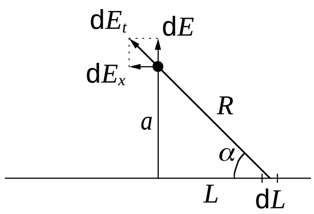

Fig. 1.- Recta con una densidad lineal de carga uniforme λ.

La carga de un trozo infinitamente pequeño dL de la recta es puntual de valor λdL. En el punto P crea un campo en la dirección de R cuyo módulo vale

$$\mathrm{d}E_t = k_0 \frac{\lambda \mathrm{d}L}{R^2}$$

La componente de_x vale

$$\mathrm{d}E_x = k_0 \frac{\lambda \mathrm{d}L}{R^2} \cos\alpha$$

La componente dE vale

$$\mathrm{d}E = k_0 \frac{\lambda \mathrm{d}L}{R^2} \operatorname{sen}\alpha$$

Las componentes totales se hallan integrando a lo largo de toda la recta. Para poder hacerlo han de ponerse todas las variables en función de una sola. Lo mejor es elegir α:

$$R = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$L = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\mathrm{d}L = \frac{-a\,\mathrm{sen}^2\alpha - a\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha}\mathrm{d}\alpha = -\frac{a}{\mathrm{sen}^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

Sustituyendo,

$$\mathrm{d}E_x = k_0\frac{\lambda\mathrm{d}L}{R^2}\cos\alpha = k_0\frac{\lambda\left(-\dfrac{a}{\mathrm{sen}^2\alpha}\mathrm{d}\alpha\right)}{\left(\dfrac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha}\right)^2}\cos\alpha = -\frac{k_0\lambda}{a}\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$$

$$E_x = -\frac{k_0\lambda}{a}\int_\pi^0\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = -\frac{k_0\lambda}{a}\left[\mathrm{sen}\,\alpha\right]_\pi^0 = 0$$

La componente total paralela a la recta es cero, lo que era de esperar, pues la parte de esa componente creada por la semirrecta izquierda es opuesta a la parte creada por la semirrecta derecha.

$$\mathrm{d}E = k_0\frac{\lambda\mathrm{d}L}{R^2}\mathrm{sen}\,\alpha = k_0\frac{\lambda\left(-\dfrac{a}{\mathrm{sen}^2\alpha}\mathrm{d}\alpha\right)}{\left(\dfrac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha}\right)^2}\mathrm{sen}\,\alpha = -k_0\frac{\lambda}{a}\mathrm{sen}\,\alpha\mathrm{d}\alpha$$

$$E = -k_0\frac{\lambda}{a}\int_\pi^0\mathrm{sen}\,\alpha\mathrm{d}\alpha = -k_0\frac{\lambda}{a}\left[-\cos\alpha\right]_\pi^0 = k_0\frac{2\lambda}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

El campo resulta perpendicular a la recta con sentido hacia fuera de ella si λ es positivo y hacia ella si es negativo.

Es más fácil si se utiliza la ley de Gauss:

Si suponemos una superficie cilíndrica de longitud L cuyo eje es la recta y que contenga al punto P donde se quiere hallar el campo, como, por simetría el campo es perpendicular a esa superficie S_L, el flujo a través de la superficie lateral vale

$$\Phi = S_L E = 2\pi a L E$$

El flujo a través de las dos bases del cilindro es cero. Por tanto el anterior flujo es el de una superficie cerrada, o sea

$$2\pi a L E = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

λL es la carga interior a la superficie. Despejando se tiene:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

20.- Hallar la diferencia de potencial entre dos puntos exteriores a una recta cargada con una densidad lineal de carga uniforme λ. Si el cero del potencial se sitúa en un punto exterior a la recta que dista a_0 de ella, hallar el potencial de otro punto exterior que dista a de la recta

Solución

Según se vio en el problema anterior, el módulo del campo en un punto que dista a de la recta vale

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

y el campo tiene la dirección de a. Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\mathrm{d}V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\mathrm{d}a$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln a\right]_{a_1}^{a_2} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a_1}{a_2}$$

Si $a_2 = a$ y $a_1 = a_0$, resulta:

$$V - 0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a_0}{a}$$

O sea,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a_0}{a}$$

Fórmula que da el potencial en el punto que dista a de la recta si el cero del potencial se sitúa en un punto que dista a_0 de ella. Nótese que si el origen de potenciales se situara en el infinito, a_0 tendería a infinito para cualquier valor de a, lo que significa que, para el campo creado por una recta cargada con densidad lineal λ, no existe ningún potencial con su cero en el infinito.

21.- Dos rectas paralelas separadas 0.5 m están cargadas con una densidad de carga uniforme $\lambda_1 = 3\mu\mathrm{C/m}$ y $\lambda_2 = -2\mu\mathrm{C/m}$. Hallar la fuerza que una ejerce sobre otra por metro de longitud.

Solución:

El campo de atracción en cada punto de la recta 2 vale

$$E_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

La fuerza en un elemento $\mathrm{d}L_2$ es

$$\mathrm{d}F_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 a}\lambda_2 \mathrm{d}L_2 = 2k_0 \frac{\lambda_1\lambda_2}{a}\mathrm{d}L_2$$

La fuerza por unidad de longitud sobre la recta 2 es

$$f_2 = \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}L_2} = 2k_o \frac{\lambda_1\lambda_2}{a} \simeq -2\times 8.9875\times 10^9 \frac{3\times 10^{-6}\times 2\times 10^{-6}}{0.5} \simeq -0.22 \text{ N / m}$$

El campo de atracción en cada punto de la recta 1 es

$$E_1 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

La fuerza en un elemento $\mathrm{d}L_1$ es

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 a}\lambda_1 \mathrm{d}L_1 = 2k_0 \frac{\lambda_1\lambda_2}{a}\mathrm{d}L_1$$

La fuerza por unidad de longitud sobre la recta 1 es

$$f_1 = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}L_1} = 2k_o \frac{\lambda_1\lambda_2}{a} \simeq -0.22 \text{ N / m}$$

La misma que sobre la recta 2.

22.- La figura muestra los puntos de intersección con el plano del papel de dos rectas de gran longitud, perpendiculares a ese plano, cargadas con densidades lineales uniformes de electricidad λ_1 y λ_2 (Así se puede describir, por ejemplo, una línea eléctrica de tres hilos). Hallar el campo y el potencial que crean en el punto P de ese plano. Situar el cero del potencial en el origen de coordenadas.

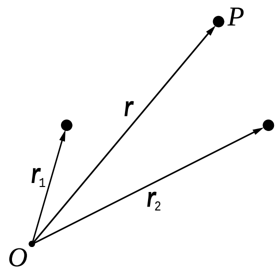

Fig. 2

Solución:

Los campos que crean las rectas en P son, respectivamente,

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 R_1^2}\boldsymbol{R}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 R_2^2}\boldsymbol{R}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)$$

El campo en P es, por tanto,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2} + \frac{\lambda_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^2}\right)$$

Los potenciales que crean en el punto P son, respectivamente,

$$V_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{R}_1|} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

$$V_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{R}_2|} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}$$

El potencial en P es

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\lambda_1\ln\frac{|\boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \lambda_2\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}\right)$$

23.- Una esfera de radio R está cargada con Q culombios y densidad uniforme. Hallar el campo electrostático en un punto de su interior y en su centro.

Solución:

El módulo del campo en un punto interior que dista r del centro es

$$E = k_0\frac{q}{r^2}$$

q es la carga en el interior de la esfera de radio r, que vale

$$q = \rho v = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Sustituyendo se tiene:

$$E = k_0\frac{q}{r^2} = k_0\frac{Q\frac{r^3}{R^3}}{r^2} = k_0 Q\frac{r}{R^3}$$

En el centro $r = 0$, por lo que $E = 0$.

En todos los puntos excepto en el centro el campo es radial, hacia fuera si Q es positivo y hacia el centro si es negativo.